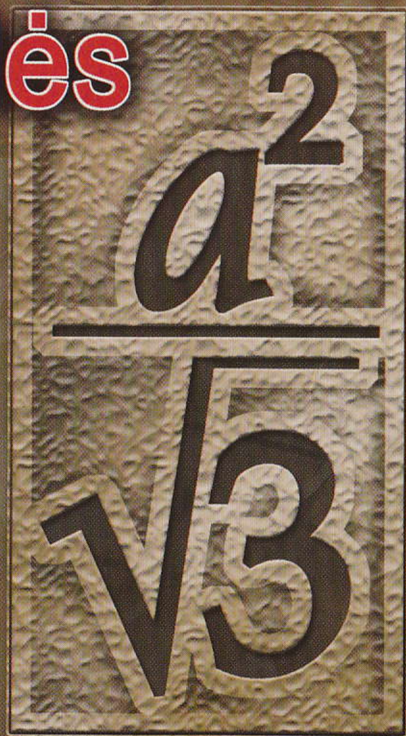
Matematikos lentelės



ŠVIESA

Pratarmė

Šioje knygelėje rasite reikalingiausias matematikos formules, apibrėžimus, teiginius bei matematikos lenteles. Leidinio turinys paremtas gimnazijų ir vidurinių mokyklų matematikos kursų temomis. Rengiant šią knygelę buvo stengiamasi, kad medžiaga būtų suprantama ir reikalinga, o paieška — kuo lengvesnė. Leidinyje pateikiama keletas apibrėžimų bei pavyzdžių tiesiogiai nesusijusių su mokymo programa. Tačiau tai įdomi ir naudinga medžiaga, kuri leis geriau suprasti atskiras matematikos temas. Tikimės, kad knygelė pateisins besimokančiųjų lūkesčius.

Matematikos lentelės visų pirma skiriamos moksleiviams. Taip pat yra parengta ir keletas kitoms disciplinoms skiriamų šios serijos knygelių. Linkime susidomėti ir jomis!

Leidėjai

TURINYS

KELETAS MATEMATINIŲ KONSTANTŲ

Skritulio skersmens ir jo ilgio sąryšis:

π = 3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169... ≈ 3,14

Natūraliojo logaritmo pagrindas:

e = 2,718 281 828 459 045 235 360 287 471 352 266 249 775 724... ≈ 2,72

Aukso pjūvis: φ = 1,618 033 988 749 894 848 204 586 834... ≈ 1,62

$$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi} \qquad \varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$\sqrt{2}$ = 1,414 213 562 373 095 048... $\sqrt{3}$ = 1,732 050 807 568 772 935...

$\sqrt{5}$ = 2,236 067 977 499 789 696... $\sqrt{10}$ = 3,162 277 660 168 379 332...

$\log_{10} e$ = 0,434 294 481 903 251 827... $\log_{10} 2$ = 0,301 029 995 663 981 195...

ln 10 = 2,302 585 092 994 045 684... ln 2 = 0,693 147 180 559 945 309...

1 radianas ≈ 57°17′44,80625″ 1° ≈ 0,017 453 292 519 943 296... rad

Skaičių pavadinimai

Tūkstantis	10^3	=	1 000
Milijonas	10^6	=	1 000 000
Milijardas	10^9	=	1 000 000 000
Bilijonas	10^{12}	=	1 000 000 000 000
Bilijardas[a]	10^{15}	=	1 000 000 000 000 000
Trilijonas	10^{18}	=	1 000 000 000 000 000 000
Kvadrilijonas	10^{24}	=	1 000 000 000 000 000 000 000 000
Kvintilijonas	10^{30}	=	1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
Sekstilijonas[b]	10^{36}	=	1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

[a] retai Lietuvoje vartojamas pavadinimas; analogiškai 10^{21} — tai trilijardas, 10^{27} — kvadrilijardas ir t. t.;

[b] tolimesni: 10^{42} — septilijonas, 10^{48} — oktilijonas, 10^{54} — nonilijonas, 10^{60} — decilijonas, 10^{600} — centilijonas

Pagrindiniai realiųjų skaičių poaibiai

Skaičiai	Žymėjimas	Paaiškinimai	Pavyzdžiai
Natūralieji	N	Skaičius ir skaičiai gauti pridedant vienetą[a]	1, 2, 3, 6, 1000
Sveikieji	Z	0, natūralieji skaičiai bei jiems priešingi skaičiai	1, 2, 0, –1, –4
Racionalieji	Q	Skaičiai, kuriuos galima išreikšti trupmena	$0, 2, 15, \frac{1}{3}, -\frac{123}{124}$
Iracionalieji	I	Realieji skaičiai, kurie nepriklauso racionaliųjų skaičių aibei	$\sqrt{2}, \pi$
Algebriniai		(bet kurio laipsnio) algebrinių lygčių su sveikaisiais koeficientais šaknys	$1, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt[3]{13} - \sqrt{2} + 7$
Transcendentiniai		Realieji skaičiai, kurie nėra algebriniai skaičiai	$\pi, e^3, 2^{\sqrt{2}}$

[a] kartais (ne Lietuvoje) mažiausiu natūraliuoju skaičiumi vadinamas 0, o ne 1

SKAIČIŲ SAVYBĖS

Apibrėžimai, susiję su skaičių dalyba

Pavadinimas	Apibrėžimas	Pavyzdžiai
Pirminiai skaičiai	Natūralieji skaičiai $n > 1$, kurie turi tik du natūraliuosius daliklius — 1 ir n	2, 3, 5, 7, 11, 13, $2^{31}-1$, $2^{3217}-1$
Reliatyviai pirminiai skaičiai	Du natūralieji skaičiai, kurių bendras didžiausias daliklis yra 1	2 ir 3, 4 ir 9, 9 ir 14
Tobulieji skaičiai[a]	Skaičiai, kurių skaitmenų suma yra lygi natūraliųjų daliklių sumai (išskyrus patį skaičių)	6 = 3 + 2 + 1; 28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1
Bendras didžiausias daliklis[b]	Didžiausias natūralusis skaičius, iš kurio galima padalyti visus (du arba daugiau) natūraliuosius skaičius	bdd(4, 6) = 2; bdd(10, 20) = 10; bdd(24, 30, 60) = 6
Bendras mažiausias kartotinis[b]	Mažiausias natūralusis skaičius, kuris dalijasi iš kiekvieno duoto (dviejų arba daugiau) natūraliojo skaičiaus	bmk(12, 30) = 60; bmk(5, 10, 11) = 55

[a] iki 2001 m. birželio mėn. buvo žinomi 38 tobulieji skaičiai. Visus juos galima išreikšti taip: $2^{p-1}(2^p - 1)$, kai $2^p - 1$ — pirminis skaičius; didžiausias žinomas tobulasis skaičius dešimtainėje sistemoje sudarytas iš 2098960 skaitmenų — tai $2^{6972592}(2^{6972593} - 1)$, kuris buvo atrastas 1999 m. Nėra žinoma, ar yra daugiau tobulųjų skaičių, kaip nėra žinoma, ar egzistuoja nelyginiai tobulieji skaičiai

$$\text{bmk}(a, b, \ldots, q) \cdot \text{bdd}(a, b, \ldots, q) = a \cdot b \cdot \ldots \cdot q$$

Sveikųjų skaičių dalumo savybės[a]

Daliklis	Duotas skaičius dalijasi be liekanos iš *n*...	Pavyzdžiai
2	... jei paskutinis skaitmuo 0, 2, 4, 6 arba 8	1234567 nesidalija iš 2
3	... jei skaitmenų suma dalijasi iš 3	1234567890 dalijasi iš 3 (nes 45 dalijasi iš 3, nes 4 + 5 = 9 dalijasi iš 3)
4	... jei paskutiniai du skaitmenys sudaro dviženklį skaičių, kuris dalijasi iš 4	1234567890 nesidalija iš 4, nes 90 nesidalija iš 4
5	... jei paskutinis skaitmuo 0 arba 5	1234567890 dalijasi iš 5
6	... jei skaičius dalijasi iš 2 ir 3	2345678 nesidalija iš 6 (nors dalijasi iš 2, bet nesidalija iš 3)
8	... jei trys paskutiniai skaitmenys sudaro triženklį skaičių, kuris dalijasi iš 8	12345100 nesidalija iš 8, nes 100 nesidalija iš 8
9	... jei skaitmenų suma dalijasi iš 9	12345678 dalijasi iš 9, nes 36 dalijasi iš 9
10	... jei paskutinis skaičiaus skaitmuo yra 0	123445560 dalijasi iš 10
11	... jei skaitmenų, esančių lyginėse vietose, ir skaitmenų, esančių nelyginėse vietose, sumų skirtumas dalijasi iš 11 (gali būti lygus nuliui)	12345678 nesidalija iš 11, nes 1 – 2 + 3 – 4 + 5 – 6 + 7 – 8 = –4 nesidalija iš 11
12	... jei skaičius dalijasi iš 3 ir 4	12345678 nesidalija iš 12 (nors skaičius dalijasi iš 3, bet jis nesidalija iš 4)

[a] dešimtainiai skaičiai

TRUPMENOS, PROPORCIJOS, APYTIKSLIAI SKAIČIAI

Pagrindiniai veiksmai su trupmenomis

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}, \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Pagrindinės proporcijų savybės

Iš proporcijos $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ išplaukia tokie sąryšiai (jei trupmenų vardikliai yra nelygūs nuliui):

$$a \cdot d = b \cdot c \quad \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c} \quad \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c} \quad \frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Praktinės apytikslių skaičiavimų taisyklės

Veiksmai	Formulė	Po kablelio paliekamas skaitmenų skaičius[a]	Pavyzdys[bc]	Paklaida
Teigiamųjų skaičių suma	$a_1 + a_2$	Tiek skaitmenų **po kablelio**, kiek jų turi mažiau tikslus skaičius	$123{,}245 + 4{,}3 \approx 127{,}5$; $1{,}23 \cdot 10^7 + 120 \approx 1{,}23 \cdot 10^7$	
Teigiamųjų skaičių skirtumas	$a_1 - a_2$	Tiek skaitmenų **po kablelio**, kiek jų turi mažiau tikslus skaičius	$123{,}245 - 3{,}2 \approx 120{,}0$; $123{,}345 - 123{,}2 \approx 0{,}1$; $11{,}2 - 0{,}001 \approx 11{,}2$	Kartais staigiai auga (antrasis pvz.)
Skaičių sandauga	$a_1 \cdot a_2$	Tiek **reikšmingų** skaitmenų po kablelio, kiek jų turi mažiau tikslus skaičius	$1{,}234 \cdot 1{,}1 \approx 1{,}4$; $50{,}001 \cdot 4{,}0 \approx 2{,}0 \cdot 10^3$	Iki dviejų kartų didesnė nei toji, kurią turi mažiau tikslus skaičius
Skaičių dalmuo	$\frac{a_1}{a_2}$	Tiek **reikšmingų** skaitmenų po kablelio, kiek jų turi mažiau tikslus skaičius	$\frac{1{,}234}{1{,}234} \approx 1{,}000$; $\frac{12{,}234}{1{,}0} \approx 12$	
Skaičiaus kvadratas	a^2	Tiek, kiek **reikšmingų** skaitmenų	$1{,}24^2 \approx 1{,}54$; $0{,}011^2 \approx 0{,}00012$	Vidutiniškai auga du kartus
Skaičiaus *n*–asis laipsnis	a^n	Tiek **skaitmenų** po kablelio, kiek reikšmingų skaitmenų turi mažiau tikslus laipsniu keliamas skaičius	$5{,}2^3 \approx 1{,}4 \cdot 10^2$; $1{,}01^{10} \approx 1{,}10$	Vidutiniškai auga *n* kartų
Skaičiaus šaknis	$\sqrt{a}$	Tiek skaitmenų po kablelio, kiek **reikšmingų** skaitmenų turi mažiau tikslus pošaknyje esantis skaičius	$\sqrt{1{,}24} \approx 1{,}11$; $\sqrt{123{,}45} \approx 11{,}111$	Mažėja vidutiniškai du kartus
n–ojo laipsnio šaknis	$\sqrt[n]{a}$	Tiek skaitmenų po kablelio, kiek **reikšmingų** skaitmenų turi mažiau tikslus pošakninis skaičius	$\sqrt[4]{1{,}24} \approx 1{,}06$; $\sqrt[8]{0{,}000012} \approx 0{,}24$	Mažėja vidutiniškai *n* kartų
logaritmas	$\log a$	Tiek skaitmenų **po kablelio**, kiek **reikšmingų** skaitmenų turėjo skaičius *a*	$\log 123{,}456 \approx 2{,}091\ 512$; $\log 0{,}00\ 011 \approx -3{,}96$	

[a] atliekant skaičiavimus su apytiksliais skaičiais patartina tarpiniuose skaičiavimuose rašyti po kablelio bent vienu skaitmeniu daugiau, kad vėliau gavus galutinį rezultatą galima būtų atmesti skaitmenį, paliktą atsargai;
[b] darome prielaidą, kad duotieji skaičiai yra tikri, nė vieno jų negalima laikyti tiksliuoju;
[c] skaičius 0,00 002 turi tik vieną reikšmingąjį skaitmenį ir penkis skaitmenis po kablelio; skaičius 2000 turi keturis reikšmingus skaitmenis; tas pats skaičius užrašytas 2,0*10³ turi du reikšmingus skaitmenis (ir formaliai „–2" skaitmenis po kablelio, nes taip užrašytas skaičius neteikia informacijos apie šio skaičiaus dešimtis ir vienetus)

PAGRINDINĖS ALGEBROS FORMULĖS

Pagrindiniai aritmetiniai veiksmai realiųjų skaičių aibėje

Veiksmas	Jungiamumas (asociatyvumas)	Perstatomumas (komutatyvumas)	Skirstomumas (distributyvumas)	Atvirkštinė operacija
Sudėtis	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$a+b=b+a$	—	Atimtis
Daugyba	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$	$a\cdot b=b\cdot a$	Sudėties atžvilgiu $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ Atimties atžvilgiu $a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$	Dalyba[a]

[a] dalyba $\frac{a}{b}$, kai $b = 0$ negalima, t. y. daugyba iš 0 neturi atvirkštinės operacijos

Modulio savybės

Apibrėžimas $|a|=\begin{cases} a, & kai\ a\geq 0,\\ -a, & kai\ a<0\end{cases}$

$|a| \geq 0$ Jeigu $|a| = 0$, tai $a = 0$

$|a + b| \leq |a| + |b|$ $|a - b| \geq |a| - |b|$ $||a| - |b|| \leq |a + b|$

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

Kėlimas laipsniu

$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n kartų) (a – realusis skaičius, n – natūralusis skaičius)

$a^0 = 1\ (a \neq 0)$ $0^n = 0\ (n \neq 0)$ $1^n = 1$

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\ (a\neq 0)$ $(-a)^n = a^n$ (n lyginis) $(-a)^n = -a^n$ (n nelyginis)

$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$ $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}\ (a\neq 0)$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\ (b\neq 0)$

Skaičių laipsnių a^n lentelė

a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	9765625
6	36	216	1296	7776	46656	278836	1679616	10077696	60466176
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607	282475249
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728	1073741824
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489	3486784401

Šaknies traukimas

$\sqrt[n]{0}=0$ $\sqrt[n]{1}=1$

$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\ (a\geq 0)$ $a^{-\frac{1}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\ (a>0)$

(jei n – nelyginis, tai dvejose paskutinėse formulėse galimi veiksmai, kai $a < 0$)

$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^n$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$

$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$ $(a, b \geq 0)$

$\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|=\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$ $(a, b \geq 0)$

Iracionalumo šalinimo iš vardiklio būdai

$\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$ $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}$

$\frac{a}{b+\sqrt{c}}=\frac{a}{b^2-c}\left(b-\sqrt{c}\right)$ $\frac{a}{b-\sqrt{c}}=\frac{a}{b^2-c}\left(b+\sqrt{c}\right)$

$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a}{b-c}\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)$ $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}=\frac{a}{b-c}\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$

$\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{c}}}=\frac{a}{b^2-c}\sqrt{\left(b^2-c\right)\left(b-\sqrt{c}\right)}$ $\frac{a}{\sqrt{b-\sqrt{c}}}=\frac{a}{b^2-c}\sqrt{\left(b^2-c\right)\left(b+\sqrt{c}\right)}$

Aukščiau pateiktose formulėse tariame, kad po šaknimi esantys skaičiai yra teigiami, o vardikliai — nelygūs nuliui.

Faktorialai

Apibrėžimas: $0! = 1$ $n! = (n - 1)!\,n$ (kai $n > 0$) $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

1! = 1	11! = 39 916 800
2! = 2	12! = 479 001 600
3! = 6	13! = 6 227 020 800
4! = 24	14! = 87 178 291 200
5! = 120	15! = 1 307 674 368 000
6! = 720	16! = 20 922 789 888 000
7! = 5040	17! = 355 687 428 096 000
8! = 40320	18! = 6 402 373 705 728 000
9! = 362880	19! = 121 645 100 408 832 000
10! = 3628800	20! = 2 432 902 008 176 640 000

Stirlingo formulė

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}$$

(tai apytikslė faktorialo reikšmė esant dideliems skaičiams n; kai $n = 20$ formulės paklaida mažesnė nei 0,5 %)

DAUGIANARIAI

Daugianarių pateikimo būdai

Pavadinimas	Formulė[a]	Pastabos
Bendra išraiška	$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	Dažniausiai sutinkama išraiška. Patogi braižant grafikus
Hornerio išraiška	$W(x) = ((\ldots((a_n x + a_{n-1}) x + a_{n-2}) x + \ldots) x + a_1) x + a_0$	Patogi išraiška įvairiems skaičiavimams: daugybos veiksmo taikymo skaičius, reikalingas rasti $W(x)$, yra minimalus
Dauginamųjų išraiška	$W(x) = a\,(x - x_1) \ldots (x - x_k) \ldots (x^2 + b_1 x + c_1) \ldots (x^2 + b_p x + c_p)$	Taip parašytame daugianaryje iš karto matome jo šaknis; jei $W(x) = 0$ turi tik realiąsias šaknis, tai $p = 0$. Jei neturi tokių šaknų – tai $k = 0$[b]

[a] a_i — daugianario koeficientai; x_i — lygties $W(x) = 0$ šaknys; c_i, d_i — žinomi koeficientai;
[b] jei darome prielaidą, kad kompleksinės šaknys gali būti, tai $p = 0$ (egzistuoja tik pirmojo laipsnio dauginamieji)

Daugianarių dalyba, $P(x)/Q(x)$*

Problema	Sprendimo būdai	Pavyzdys, kai $P(x) = x^5 + x^4 - 3x + 1$; $Q(x) = x^3 - x$
Daugianarių dalyba (sveikosios dalies išskyrimas)	1) randame $T(x)$, dalydami aukščiausiojo laipsnio vienanarius, esančius $P(x)$ ir $Q(x)$	$T_1(x) = \frac{x^5}{x^3} = x^2$
	2) randame daugianarį $P_1(x) = P(x) - T(x)\,Q(x)$	$P_1(x) = P(x) - x^2 Q(x) = x^4 + x^3 - 3x + 1$
	3) kartojame 1-ąjį ir 2-ąjį veiksmą imdami daugianarį $P_1(x)$ vietoj $P(x)$ tol, kol $P_1(x)$ laipsnis bus mažesnis nei $Q(x)$ laipsnis	$T_2(x) = x^4/x^3 = x$; $P_1(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$; $T_3(x) = x^3/x^3 = 1$; $P_1(x) = x^2 - 2x + 1$ (nutraukti!)
	Taip gaunamų vienanarių suma $T_1(x)$ sudaro dalmenį, o paskutinis daugianaris $P_1(x)$ yra dalybos liekana	$\frac{P(x)}{Q(x)} = x^2 + x + 1 + \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$
Bendro didžiausio daliklio paieška	1) dalijame $P(x)/Q(x)$, randame dalmenį $T_1(x)$ ir liekaną $R_1(x)$	$T_1(x) = x^2 + x + 1$; $R_1(x) = x^2 - 2x + 1$
	2) dalijame $Q(x)/R_1(x)$, randame dalmenį $T_2(x)$ ir liekaną $R_2(x)$	$T_2(x) = x + 2$; $R_2(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$
	3) dalijame $R_1(x)/R_2(x)$ randame liekaną $R_3(x)$, vėliau iš $R_2(x)/R_3(x)$ liekaną $R_4(x)$ ir t. t., kol liekana bus lygi 0	$T_3(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; $R_3(x) = 0$ (nutraukti!)
	4) paskutinė nenulinė liekana yra bendras didžiausias daliklis	bdd $= x - 1$
Skaidymas paprastosiomis trupmenomis[a]	Vardiklį reikia suskaidyti į pirmojo ir antrojo laipsnio dauginamuosius (jie sudarys paprastųjų trupmenų vardiklius). Nežinomus skaitiklius (A, B, …) reikia rasti iš lygčių sistemos (palyginti koeficientus prie skirtingų kintamojo laipsnių)	$\frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)}$, iš čia $x - 1 = A(x + 1) + Bx$, gauname $\begin{cases} x = Ax + Bx \\ -1 = A, \end{cases}$ iš čia $A = -1$; $B = 2$.

[a] tiktai taisyklingoms trupmenoms (vardiklio laipsnis didesnis nei skaitiklio) bei nesuprastinamoms trupmenoms (vardiklį ir skaitiklį padalijome iš bendro didžiausio daliklio)
* čia ir toliau taip pateikiamas trupmenos ženklas

Dvinarių kėlimas laipsniu

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Niutono dvinaris

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n, \quad \text{čia } \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Paskalio trikampis

$n = 0$ 1

$n = 1$ 1 1

$n = 2$ 1 2 1

$n = 3$ 1 3 3 1

$n = 4$ 1 4 6 4 1

$n = 5$ 1 5 10 10 5 1

$n = 6$ 1 6 15 20 15 6 1

$n = 7$ 1 7 21 35 35 21 7 1

$n = 8$ 1 8 28 56 70 56 28 8 1

$n = 9$ 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

$n = 10$ 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

$n = 11$ 1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

$n = 12$ 1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

m-oji eilutės reikšmė yra lygi $\binom{n}{m}$, $n, m = 0, 1, \ldots$

Kiekviena reikšmė (išskyrus abi kraštutines) yra lygi dviejų reikšmių, esančių virš jos, sumai:

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$$

n-ojoje eilutėje visų reikšmių suma yra lygi 2^n:

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Daugianarių skaidymas dauginamaisiais

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$a^2 + b^2$ — neišskaidomas

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n})$

$a^{2n+1} - b^{2n+1} = (a - b)(a^{2n} + a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 + \ldots + ab^{2n-1} + b^{2n})$

$a^{2n} - b^{2n} = (a - b)(a^{2n-1} + a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 + \ldots + ab^{2n-2} + b^{2n-1})$

KVADRATINIŲ ŠAKNŲ REIKŠMIŲ LENTELĖ

x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x+0,1}$	$\sqrt{x+0,2}$	$\sqrt{x+0,3}$	$\sqrt{x+0,4}$	$\sqrt{x+0,5}$	$\sqrt{x+0,6}$	$\sqrt{x+0,7}$	$\sqrt{x+0,8}$	$\sqrt{x+0,9}$
1,0	1,0000	1,0488	1,0954	1,1402	1,1832	1,2247	1,2649	1,3038	1,3416	1,3784
2,0	1,4142	1,4491	1,4832	1,5166	1,5492	1,5811	1,6125	1,6432	1,6733	1,7029
3,0	1,7321	1,7607	1,7889	1,8166	1,8439	1,8708	1,8974	1,9235	1,9494	1,9748
4,0	2,0000	2,0248	2,0494	2,0736	2,0976	2,1213	2,1448	2,1676	2,1909	2,2136
5,0	2,2361	2,2583	2,2804	2,3022	2,3238	2,3452	2,3664	2,3875	2,4083	2,4290
6,0	2,4495	2,4698	2,4900	2,5100	2,5298	2,5495	2,5690	2,5884	2,6077	2,6268
7,0	2,6458	2,6646	2,6833	2,7019	2,7203	2,7386	2,7568	2,7749	2,7928	2,8107
8,0	2,8284	2,8460	2,8636	2,8810	2,8983	2,9155	2,9326	2,9496	2,9665	2,9833
9,0	3,0000	3,0166	3,0332	3,0496	3,0659	3,0822	3,0984	3,1145	3,1305	3,1464
10,0	**3,1623**	**3,1780**	**3,1937**	**3,2094**	**3,2249**	**3,2404**	**3,2558**	**3,2711**	**3,2863**	**3,3015**
11,0	3,3166	3,3317	3,3466	3,3615	3,3764	3,3912	3,4059	3,4205	3,4351	3,4496
12,0	3,4641	3,4785	3,4928	3,5071	3,5214	3,5355	3,5496	3,5637	3,5777	3,5917
13,0	3,6056	3,6194	3,6332	3,6469	3,6606	3,6742	3,6878	3,7104	3,7148	3,7283
14,0	3,7417	3,7550	3,7683	3,7815	3,7947	3,8079	3,8210	3,8341	3,8471	3,8601
15,0	3,8730	3,8859	3,8987	3,9115	3,9243	3,9370	3,9497	3,9623	3,9749	3,9875
16,0	4,0000	4,0125	4,0249	4,0373	4,0497	4,0620	4,0743	4,0866	4,0988	4,1110
17,0	4,1231	4,1352	4,1473	4,1593	4,1713	4,1833	4,1952	4,2071	4,2190	4,2308
18,0	4,2426	4,2544	4,2661	4,2778	4,2895	4,3012	4,3128	4,3243	4,3359	4,3474
19,0	4,3589	4,3704	4,3818	4,3932	4,4045	4,4159	4,4272	4,4385	4,4497	4,4609
20,0	**4,4724**	**4,4833**	**4,4944**	**4,5056**	**4,5166**	**4,5277**	**4,5387**	**4,5497**	**4,5607**	**4,5717**
21,0	4,5826	4,5935	4,6043	4,6152	4,6260	4,6368	4,6476	4,6583	4,6690	4,6797
22,0	4,6904	4,7011	4,7117	4,7223	4,7329	4,7434	4,7539	4,7645	4,7749	4,7854
23,0	4,7958	4,8062	4,8166	4,8270	4,8374	4,8477	4,8580	4,8683	4,8785	4,8888
24,0	4,8990	4,9092	4,9193	4,9295	4,9396	4,9497	4,9598	4,9699	4,9800	4,9900
25,0	5,0000	5,0100	5,0200	5,0299	5,0398	5,0498	5,0596	5,0695	5,0794	5,0892
26,0	5,0990	5,1088	5,1186	5,1284	5,1381	5,1478	5,1575	5,1672	5,1769	5,1865
27,0	5,1962	5,2058	5,2154	5,2249	5,2345	5,2440	5,2536	5,2631	5,2726	5,2820
28,0	5,2915	5,3009	5,3104	5,3198	5,3292	5,3385	5,3479	5,3572	5,3666	5,3759
29,0	5,3852	5,3944	5,4037	5,4129	5,4222	5,4314	5,4406	5,4498	5,4589	5,4681
30,0	**5,4772**	**5,4863**	**5,4955**	**5,5045**	**5,5136**	**5,5227**	**5,5317**	**5,5408**	**5,5498**	**5,5588**
31,0	5,5678	5,5767	5,5857	5,5946	5,6036	5,6125	5,6214	5,6303	5,6391	5,6480
32,0	5,6569	5,6657	5,6745	5,6833	5,6921	5,7009	5,7096	5,7184	5,7271	5,7359
33,0	5,7446	5,7533	5,7619	5,7706	5,7793	5,7879	5,7966	5,8052	5,8138	5,8224
34,0	5,8310	5,8395	5,8481	5,8566	5,8652	5,8737	5,8822	5,8907	5,8992	5,9076
35,0	5,9161	5,9245	5,9330	5,9414	5,9498	5,9582	5,9666	5,9749	5,9833	5,9917
36,0	6,0000	6,0083	6,0166	6,0249	6,0332	6,0415	6,0498	6,0581	6,0663	6,0745
37,0	6,0828	6,0910	6,0992	6,1074	6,1156	6,1237	6,1319	6,1400	6,1482	6,1563
38,0	6,1644	6,1725	6,1806	6,1887	6,1968	6,2048	6,2129	6,2209	6,2290	6,2370
39,0	6,2450	6,2530	6,2610	6,2690	6,2769	6,2849	6,2929	6,3008	6,3087	6,3166
40,0	**6,3246**	**6,3325**	**6,3403**	**6,3482**	**6,3561**	**6,3640**	**6,3718**	**6,3797**	**6,3875**	**6,3953**
41,0	6,4031	6,4109	6,4187	6,4265	6,4343	6,4420	6,4498	6,4576	6,4653	6,4730
42,0	6,4807	6,4885	6,4962	6,5038	6,5115	6,5192	6,5269	6,5345	6,5422	6,5498
43,0	6,5574	6,5651	6,5727	6,5803	6,5879	6,5955	6,6030	6,6106	6,6182	6,6257
44,0	6,6332	6,6408	6,6483	6,6558	6,6633	6,6708	6,6783	6,6858	6,6933	6,7007
45,0	6,7082	6,7157	6,7231	6,7305	6,7380	6,7454	6,7528	6,7602	6,7676	6,7750
46,0	6,7823	6,7897	6,7971	6,8044	6,8118	6,8191	6,8264	6,8337	6,8411	6,8484
47,0	6,8557	6,8629	6,8702	6,8775	6,8848	6,8920	6,8993	6,9065	6,9138	6,9210
48,0	6,9282	6,9354	6,9426	6,9498	6,9570	6,9642	6,9714	6,9785	6,9857	6,9929
49,0	7,0000	7,0071	7,0143	7,0214	7,0285	7,0356	7,0427	7,0498	7,0569	7,0640
50,0	**7,0711**	**7,0781**	**7,0852**	**7,0922**	**7,0993**	**7,1063**	**7,1134**	**7,1204**	**7,1274**	**7,1344**
51,0	7,1414	7,1484	7,1554	7,1624	7,1694	7,1764	7,1833	7,1903	7,1972	7,2042
52,0	7,2111	7,2180	7,2250	7,2319	7,2388	7,2457	7,2526	7,2664	7,2664	7,2732

x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x+0,1}$	$\sqrt{x+0,2}$	$\sqrt{x+0,3}$	$\sqrt{x+0,4}$	$\sqrt{x+0,5}$	$\sqrt{x+0,6}$	$\sqrt{x+0,7}$	$\sqrt{x+0,8}$	$\sqrt{x+0,9}$
53,0	7,2801	7,2870	7,2938	7,3007	7,3075	7,3144	7,3212	7,3280	7,3348	7,3417
54,0	7,3485	7,3553	7,3621	7,3689	7,3756	7,3824	7,3892	7,3959	7,4027	7,4095
55,0	7,4162	7,4229	7,4297	7,4364	7,4431	7,4498	7,4565	7,4632	7,4699	7,4766
56,0	7,4833	7,4900	7,4967	7,5033	7,5100	7,5166	7,5233	7,5299	7,5366	7,5432
57,0	7,5498	7,5565	7,5631	7,5697	7,5763	7,5829	7,5895	7,5961	7,6026	7,6092
58,0	7,6158	7,6223	7,6289	7,6354	7,6420	7,6485	7,6551	7,6616	7,6681	7,6746
59,0	7,6811	7,6877	7,6942	7,7006	7,7070	7,7136	7,7201	7,7266	7,7330	7,7395
60,0	**7,7460**	**7,7524**	**7,7589**	**7,7653**	**7,7717**	**7,7782**	**7,7846**	**7,7910**	**7,7974**	**7,8038**
61,0	7,8102	7,8166	7,8230	7,8294	7,8358	7,8422	7,8486	7,8549	7,8613	7,8677
62,0	7,8740	7,8804	7,8867	7,8930	7,8994	7,9057	7,9120	7,9183	7,9246	7,9310
63,0	7,9373	7,9436	7,9498	7,9561	7,9624	7,9687	7,9750	7,9812	7,9875	7,9937
64,0	8,0000	8,0062	8,0125	8,0187	8,0250	8,0312	8,0374	8,0436	8,0498	8,0561
65,0	8,0623	8,0685	8,0747	8,0808	8,0870	8,0932	8,0994	8,1056	8,1117	8,1179
66,0	8,1240	8,1302	8,1363	8,1425	8,1486	8,1548	8,1609	8,1670	8,1731	8,1792
67,0	8,1854	8,1915	8,1976	8,2037	8,2098	8,2158	8,2219	8,2280	8,2341	8,2401
68,0	8,2462	8,2523	8,2583	8,2644	8,2704	8,2765	8,2825	8,2885	8,2946	8,3006
69,0	8,3066	8,3126	8,3187	8,3247	8,3307	8,3367	8,3427	8,3487	8,3546	8,3606
70,0	**8,3666**	**8,3726**	**8,3785**	**8,3845**	**8,3905**	**8,3964**	**8,4024**	**8,4083**	**8,4143**	**8,4202**
71,0	8,4261	8,4321	8,4380	8,4439	8,4499	8,4558	8,4617	8,4676	8,4735	8,4794
72,0	8,4853	8,4912	8,4971	8,5029	8,5088	8,5147	8,5206	8,5264	8,5323	8,5381
73,0	8,5440	8,5499	8,5557	8,5615	8,5674	8,5732	8,5790	8,5849	8,5907	8,5965
74,0	8,6023	8,6081	8,6139	8,6197	8,6255	8,6313	8,6371	8,6429	8,6487	8,6545
75,0	8,6603	8,6660	8,6718	8,6776	8,6833	8,6891	8,6948	8,7006	8,7063	8,7121
76,0	8,7178	8,7235	8,7293	8,7350	8,7407	8,7464	8,7521	8,7579	8,7636	8,7693
77,0	8,7750	8,7807	8,7864	8,7920	8,7977	8,8034	8,8091	8,8148	8,8204	8,8261
78,0	8,8318	8,8374	8,8431	8,8487	8,8544	8,8600	8,8657	8,8713	8,8769	8,8826
79,0	8,8882	8,8938	8,8994	8,9051	8,9107	8,9163	8,9219	8,9275	8,9331	8,9387
80,0	**8,9443**	**8,9499**	**8,9554**	**8,9610**	**8,9666**	**8,9722**	**8,9778**	**8,9833**	**8,9889**	**8,9944**
81,0	9,0000	9,0056	9,0111	9,0167	9,0222	9,0277	9,0333	9,0388	9,0443	9,0499
82,0	9,0554	9,0609	9,0664	9,0719	9,0774	9,0830	9,0885	9,0940	9,0995	9,1049
83,0	9,1104	9,1159	9,1214	9,1269	9,1324	9,1378	9,1433	9,1488	9,1542	9,1597
84,0	9,1652	9,1706	9,1761	9,1815	9,1869	9,1924	9,1978	9,2033	9,2087	9,2141
85,0	9,2195	9,2250	9,2304	9,2358	9,2412	9,2466	9,2520	9,2574	9,2628	9,2682
86,0	9,2736	9,2790	9,2844	9,2898	9,2952	9,3005	9,3059	9,3113	9,3167	9,3220
87,0	9,3274	9,3327	9,3381	9,3434	9,3488	9,3541	9,3595	9,3648	9,3702	9,3755
88,0	9,3808	9,3862	9,3915	9,3968	9,4021	9,4074	9,4128	9,4181	9,4234	9,4287
89,0	9,4340	9,4393	9,4446	9,4499	9,4552	9,4604	9,4657	9,4710	9,4763	9,4816
90,0	**9,4868**	**9,4921**	**9,4974**	**9,5026**	**9,5079**	**9,5131**	**9,5184**	**9,5237**	**9,5289**	**9,5341**
91,0	9,5394	9,5446	9,5499	9,5551	9,5603	9,5656	9,5708	9,5760	9,5812	9,5864
92,0	9,5917	9,5969	9,6021	9,6073	9,6125	9,6177	9,6229	9,6281	9,6333	9,6385
93,0	9,6437	9,6488	9,6540	9,6592	9,6644	9,6695	9,6747	9,6799	9,6850	9,6902
94,0	9,6954	9,7005	9,7057	9,7108	9,7160	9,7211	9,7263	9,7314	9,7365	9,7417
95,0	9,7468	9,7519	9,7570	9,7622	9,7673	9,7724	9,7775	9,7826	9,7877	9,7929
96,0	9,7980	9,8031	9,8082	9,8133	9,8184	9,8234	9,8285	9,8336	9,8387	9,8438
97,0	9,8489	9,8539	9,8590	9,8641	9,8691	9,8742	9,8793	9,8843	9,8894	9,8944
98,0	9,8995	9,9045	9,9096	9,9146	9,9197	9,9247	9,9298	9,9348	9,9398	9,9448
99,0	**9,9499**	**9,9549**	**9,9599**	**9,9649**	**9,9700**	**9,9750**	**9,9800**	**9,9850**	**9,9900**	**9,9950**

Norint rasti bet kurio skaičiaus a šaknį, reikia jį išreikšti taip: $x \cdot 10^{2n}$; kai $1 \le x < 100$, n — sveikasis skaičius.

$\sqrt{a} = \sqrt{x \cdot 10^{2n}} = \sqrt{x} \cdot 10^{n}$; $\sqrt{x}$ randame lentelėje.

Pavyzdžiai

$\sqrt{1050} = \sqrt{10,5 \cdot 100} = \sqrt{10,5} \cdot 10 = 3,2404 \cdot 10 = 32,404$;

$\sqrt{0,00074} = \sqrt{7,4 \cdot 10^{-4}} = \sqrt{7,4} \cdot \sqrt{10^{-4}} = 2,7203 \cdot 10^{-2} = 0,027203$.

KUBINIŲ ŠAKNŲ REIKŠMIŲ LENTELĖ

x	Lentelėje pateiktos skaičių kubinių šaknų reikšmės									
	x	x + 0,1	x + 0,2	x + 0,3	x + 0,4	x + 0,5	x + 0,6	x + 0,7	x + 0,8	x + 0,9
1	1,0000	1,0323	1,0627	1,0914	1,1187	1,1447	1,1696	1,1935	1,2164	1,2386
2	1,2599	1,2806	1,3006	1,3200	1,3389	1,3572	1,3751	1,3925	1,4095	1.4260
3	1,4422	1,4581	1,4736	1,4888	1,5037	1,5183	1,5326	1,5467	1,5605	1,5741
4	1,5874	1,6005	1,6134	1,6261	1,6386	1,6510	1,6631	1,6751	1,6869	1,6985
5	1,7100	1,7213	1,7325	1,7435	1,7544	1,7652	1,7758	1,7863	1,7967	1,8070
6	1,8171	1,8272	1,8371	1,8469	1,8566	1,8663	1,8758	1,8852	1,8945	1,9038
7	1,9129	1,9220	1,9310	1,9399	1,9487	1,9574	1,9661	1,9747	1,9832	1,9916
8	2,0000	2,0083	2,0165	2,0247	2,0328	2,0408	2,0455	2,0567	2,0646	2,0724
9	2,0801	2,0878	2,0954	2,1029	2,1105	2,1179	2,1253	2,1327	2,1400	2,1472

x	x	x + 1	x + 2	x + 3	x + 4	x + 5	x + 6	x + 7	x + 8	x + 9
10	**2,1544**	**2,2240**	**2,2894**	**2,3513**	**2,4101**	**2,4662**	**2,5198**	**2,5713**	**2,6207**	**2,6684**
20	2,7144	2,7589	2,8020	2,8439	2,8845	2,9240	2,9625	3,0000	3,0366	3,0723
30	3,1072	3,1414	3,1748	3,2075	3,2396	3,2711	3,3019	3,3322	3,3620	3,3912
40	3,4200	3,4482	3,4760	3,5034	3,5303	3,5569	3,5830	3,6088	3,6342	3,6593
50	3,6870	3,7084	3,7325	3,7563	3,7798	3,8030	3,8259	3,8485	3,8709	3,8930
60	3,9149	3,9365	3,9579	3,9791	4,0000	4,0207	4,0412	4,0615	4,0817	4,1016
70	4,1213	4,1408	4,1602	4,1793	4,1983	4,2172	4,2358	4,2543	4,2727	4,2908
80	4,3089	4,3267	4,3445	4,3621	4,3795	4,3968	4,4140	4,4310	4,4480	4,4647
90	4,4814	4,4979	4,5144	4,5307	4,5468	4,5629	4,5789	4,5947	4,6104	4,6261
100	**4,6416**	**4,6570**	**4,6723**	**4,6875**	**4,7027**	**4,7177**	**4,7326**	**4,7475**	**4,7622**	**4,7769**
110	4,7914	4,8059	4,8203	4,8346	4,8488	4,8629	4,8770	4,8910	4,9049	4,9187
120	4,9324	4,9461	4,9597	4,9732	4,9866	5,000	5,0133	5,0265	5,0397	5,0528
130	5,0658	5,0788	5,0916	5,1045	5,1172	5,1299	5,1426	5,1551	5,1676	5,1801
140	5,1925	5,2048	5,2171	5,2293	5,2415	5,2536	5,2656	5,2776	5,2896	5,3015
150	5,3133	5,3251	5,3368	5,3485	5,3601	5,3717	5,3832	5,3947	5,4061	5,4175
160	5,4288	5,4401	5,4514	5,4626	5,4737	5,4848	5,4959	5,5069	5,5178	5,5288
170	5,5397	5,5505	5,5613	5,5721	5,5828	5,5934	5,6041	5,6147	5,6252	5,6357
180	5,6462	5,6567	5,6671	5,6774	5,6877	5,6980	5,7083	5,7185	5,7287	5,7388
190	5,7489	5,7590	5,7690	5,7790	5,7890	5,7989	5,8088	5,8186	5,8285	5,8383
200	**5,8480**	**5,8578**	**5,8675**	**5,8771**	**5,8868**	**5,8964**	**5,9059**	**5,9155**	**5,9250**	**5,9345**
210	5,9439	5,9533	5,9627	5,9721	5,9814	5,9907	6,0000	6,0092	6,0185	6,0277
220	6,0368	6,0459	6,0550	6,0641	6,0732	6,0822	6,0912	6,1002	6,1091	6,1180
230	6,1269	6,1358	6,1446	6,1534	6,1622	6,1710	6,1797	6,1885	6,1972	6,2058
240	6,2145	6,2231	6,2317	6,2403	6,2488	6,2573	6,2658	6,2743	6,2828	6,2912
250	6,2996	6,3080	6,3164	6,3247	6,3330	6,3413	6,3496	6,3579	6,3661	6,3743
260	6,3825	6,3907	6,3988	6,4070	6,4151	6,4232	6,4312	6,4393	6,4473	6,4553
270	6,4633	6,4713	6,4792	6,4872	6,4951	6,5030	6,5108	6,5187	6,5265	6,5343
280	6,5421	6,5499	6,5577	6,5654	6,5731	6,5808	6,5885	6,5962	6,6039	6,6115
290	6,6191	6,6267	6,6343	6,6419	6,6494	6,6569	6,6644	6,6719	6,6794	6,6869
300	**6,6943**	**6,7018**	**6,7092**	**6,7166**	**6,7240**	**6,7313**	**6,7387**	**6,7460**	**6,7533**	**6,7606**
310	6,7679	6,7752	6,7824	6,7897	6,7969	6,8041	6,8113	6,8185	6,8256	6,8328
320	6,8399	6,8470	6,8541	6,8612	6,8683	6,8753	6,8824	6,8894	6,8964	6,9034
330	6,9104	6,9174	6,9244	6,9313	6,9382	6,9451	6,9521	6,9589	6,9658	6,9727
340	6,9795	6,9864	6,9932	7,0000	7,0068	7,0136	7,0203	7,0271	7,0338	7,0406
350	7,0473	7,0540	7,0607	7,0674	7,0740	7,0807	7,0873	7,0940	7,1006	7,1072
360	7,1138	7,1204	7,1269	7,1335	7,1400	7,1466	7,1531	7,1596	7,1661	7,1726
370	7,1791	7,1855	7,1920	7,1984	7,2048	7,2112	7,2177	7,2240	7,2304	7,2368
380	7,2432	7,2495	7,2558	7,2622	7,2685	7,2748	7,2811	7,2874	7,2936	7,2999
390	7,3061	7,3124	7,3186	7,3248	7,3310	7,3372	7,3434	7,3496	7,3558	7,3619
400	**7,3681**	**7,3742**	**7,3803**	**7,3864**	**7,3925**	**7,3986**	**7,4047**	**7,4108**	**7,4169**	**7,4229**
410	7,4290	7,4350	7,4410	7,4470	7,4530	7,4590	7,4650	7,4710	7,4770	7,4829
420	7,4889	7,4948	7,5007	7,5067	7,5126	7,5185	7,5244	7,5302	7,5361	7,5420
430	7,5478	7,5537	7,5595	7,5654	7,5712	7,5770	7,5828	7,5886	7,5944	7,6001
440	7,6059	7,6117	7,6174	7,6232	7,6289	7,6346	7,6403	7,6460	7,6517	7,6574

x	Lentelėje pateiktos skaičių kubinių šaknų reikšmės									
	x	x + 1	x + 2	x + 3	x + 4	x + 5	x + 6	x + 7	x + 8	x + 9
450	7,6631	7,6688	7,6744	7,6801	7,6857	7,6914	7,6970	7,7026	7,7082	7,7138
460	7,7194	7,7250	7,7306	7,7362	7,7418	7,7473	7,7529	7,7584	7,7639	7,7695
470	7,7750	7,7805	7,7860	7,7915	7,7970	7,8025	7,8079	7,8134	7,8188	7,8243
480	7,8297	7,8352	7,8406	7,8460	7,8514	7,8568	7,8622	7,8676	7,8730	7,8784
490	7,8837	7,8891	7,8944	7,8998	7,9051	7,9105	7,9158	7,9211	7,9264	7,9317
500	**7,9370**	**7,9423**	**7,9476**	**7,9528**	**7,9581**	**7,9634**	**7,9686**	**7,9739**	**7,9797**	**7,9843**
510	7,9896	7,9948	8,0000	8,0052	8,0104	8,0156	8,0208	8,0260	8,0311	8,0363
520	8,0415	8,0466	8,0517	8,0569	8,0620	8,0671	8,0723	8,0774	8,0825	8,0876
530	8,0927	8,0978	8,1028	8,1079	8,1130	8,1180	8,1231	8,1281	8,1332	8,1382
540	8,1433	8,1483	8,1533	8,1583	8,1633	8,1683	8,1733	8,1783	8,1833	8,1882
550	8,1932	8,1982	8,2031	8,2081	8,2130	8,2180	8,2229	8,2278	8,2327	8,2377
560	8,2426	8,2475	8,2524	8,2573	8,262	8,2670	8,2719	8,2768	8,2816	8,2865
570	8,2913	8,2962	8,3010	8,3059	8,3107	8,3155	8,3203	8,3251	8,3300	8,3348
580	8,3396	8,3443	8,3491	8,3539	8,3587	8,3634	8,3682	8,3730	8,3777	8,3825
590	8,3872	8,3919	8,3967	8,4014	8,4061	8,4108	8,4155	8,4202	8,4249	8,4296
600	**8,4343**	**8,4390**	**8,4437**	**8,4484**	**8,4530**	**8,4577**	**8,4623**	**8,4670**	**8,4716**	**8,4763**
610	8,4809	8,4856	8,4902	8,4948	8,4994	8,5040	8,5086	8,5132	8,5178	8,5224
620	8,5270	8,5316	8,5362	8,5408	8,5453	8,5499	8,5544	8,5590	8,5635	8,5681
630	8,5726	8,5772	8,5817	8,5862	8,5907	8,5952	8,5997	8,6043	8,6088	8,6132
640	8,6177	8,6222	8,6267	8,6312	8,6357	8,6401	8,6446	8,6490	8,6535	8,6579
650	8,6624	8,6668	8,6713	8,6757	8,6801	8,6845	8,6890	8,6934	8,6978	8,7022
660	8,7066	8,7110	8,7154	8,7198	8,7241	8,7285	8,7329	8,7373	8,7416	8,7460
670	8,7503	8,7547	8,7590	8,7634	8,7677	8,7721	8,7764	8,7807	8,7850	8,7893
680	8,7937	8,7980	8,8023	8,8066	8,8109	8,8152	8,8194	8,8237	8,8280	8,8323
690	8,8366	8,8408	8,8451	8,8493	8,8536	8,8578	8,8621	8,8663	8,8706	8,8748
700	**8,8790**	**8,8833**	**8,8875**	**8,8917**	**8,8959**	**8,9001**	**8,9043**	**8,9085**	**8,9127**	**8,9169**
710	8,9211	8,9253	8,9295	8,9337	8,9378	8,9420	8,9462	8,9503	8,9545	8,9587
720	8,9628	8,9670	8,9711	8,9752	8,9794	8,9835	8,9876	8,9918	8,9959	9,0000
730	9,0041	9,0082	9,0123	9,0164	9,0205	9,0246	9,0287	9,0328	9,0369	9,0410
740	9,0450	9,0491	9,0532	9,0572	9,0613	9,0654	9,0694	9,0735	9,0775	9,0816
750	9,0856	9,0896	9,0937	9,0977	9,1017	9,1057	9,1098	9,1138	9,1178	9,1218
760	9,1258	9,1298	9,1338	9,1378	9,1418	9,1458	9,1498	9,1537	9,1577	9,1617
770	9,1657	9,1696	9,1736	9,1775	9,1815	9,1855	9,1894	9,1933	9,1973	9,2012
780	9,2052	9,2091	9,2130	9,2170	9,2209	9,2248	9,2287	9,2326	9,2365	9,2404
790	9,2443	9,2482	9,2524	9,2560	9,2599	9,2638	9,2677	9,2716	9,2754	9,2793
800	**9,2832**	**9,2870**	**9,2909**	**9,2948**	**9,2986**	**9,3025**	**9,3063**	**9,3102**	**9,3140**	**9,3179**
810	9,3217	9,3255	9,3294	9,3332	9,3370	9,3408	9,3447	9,3485	9,3523	9,3561
820	9,3599	9,3637	9,3675	9,3713	9,3751	9,3789	9,3827	9,3865	9,3902	9,3940
830	9,3978	9,4016	9,4053	9,4091	9,4129	9,4166	9,4204	9,4241	9,4279	9,4316
840	9,4354	9,4391	9,4429	9,4466	9,4503	9,4541	9,4578	9,4615	9,4652	9,4690
850	9,4727	9,4764	9,4801	9,4838	9,4875	9,4912	9,4949	9,4986	9,5023	9,5060
860	9,5097	9,5134	9,5171	9,5207	9,5244	9,5281	9,5317	9,5354	9,5391	9,5427
870	9,5464	9,5501	9,5537	9,5574	9,5610	9,5647	9,5683	9,5719	9,5756	9,5792
880	9,5828	9,5865	9,5901	9,5937	9,5973	9,6010	9,6046	9,6082	9,6118	9,6154
890	9,6190	9,6226	9,6262	9,6298	9,6334	9,6370	9,6406	9,6442	9,6477	9,6513
900	**9,6549**	**9,6585**	**9,6620**	**9,6656**	**9,6692**	**9,6727**	**9,6763**	**9,6799**	**9,6834**	**9,6870**
910	9,6905	9,6941	9,6976	9,7012	9,7047	9,7082	9,7118	9,7153	9,7188	9,7224
920	9,7259	9,7294	9,7329	9,7364	9,7400	9,7435	9,7470	9,7505	9,7540	9,7575
930	9,7610	9,7645	9,7680	9,7715	9,7750	9,7785	9,7819	9,7854	9,7889	9,7924
940	9,7959	9,7993	9,8028	9,8063	9,8097	9,8132	9,8167	9,8201	9,8236	9,8270
950	9,8305	9,8339	9,8374	9,8408	9,8443	9,8477	9,8511	9,8546	9,8580	9,8614
960	9,8648	9,8683	9,8717	9,8751	9,8785	9,8819	9,8854	9,8888	9,8922	9,8956
970	9,8990	9,9024	9,9058	9,9092	9,9126	9,9160	9,9194	9,9227	9,9261	9,9295
980	9,9329	9,9363	9,9396	9,9430	9,9464	9,9497	9,9531	9,9565	9,9598	9,9632
990	9,9666	9,9699	9,9733	9,9766	9,9800	9,9833	9,9866	9,9900	9,9933	9,9967

Norėdami rasti skaičiaus a kubinę šaknį, turime jį užrašyti taip: $a = x \cdot 10^{3n}$; kai $1 \le x < 1000$.
$\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{x \cdot 10^{3n}} = \sqrt[3]{x} \cdot 10^{n}$ reikiamą $\sqrt[3]{x}$ randame lentelėje.

LYGTYS

Pirmojo ir antrojo laipsnio lygčių su vienu nežinomuoju sprendimas

Lygtis	Sąlygos	Sprendiniai	Geometrinė interpretacija
pirmojo laipsnio lygtis su vienu nežinomuoju			
$ax + b = 0$	$a \neq 0$	$x = -\frac{b}{a}$	Lygties $y = ax + b$ susikirtimo taškas su ašimi Ox
	$a = 0, b \neq 0$	$x \in \varnothing$	(tiesė $y = b$ nekerta ašies Ox)
	$a = 0, b = 0$	$x \in R$	tiesė $y = 0$, kuri yra ašis Ox
antrojo laipsnio su vienu nežinomuoju[a]			
$ax^2 + bx + c = 0$	$a = 0$	pirmojo laipsnio lygtis	žiūrėti aukščiau
	$a \neq 0, \Delta > 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	Parabolė $y = ax^2 + bx + c$ kerta ašį Ox dviejuose taškuose
	$a \neq 0, \Delta = 0$	$x = -\frac{b}{2a}$	parabolės $y = ax^2 + bx + c$ ir ašies Ox lietimosi taškas
	$a \neq 0, \Delta < 0$	$x \in \varnothing$	(parabolė $y = ax^2 + bx + c$ neturi bendrų taškų su ašimi Ox)

[a] Δ diskriminantas, $\Delta = b^2 - 4ac$

Vieto formulės

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $\quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Kvadratinio trinario vaizdavimo būdai

Pavadinimas	Išraiška[a]	Paaiškinimai, pastabos
Bendras	$ax^2 + bx + c$	$(0, c)$ – susikirtimo su ašimi Oy taškas
Kanoninis	$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$	Taškas su koordinatėmis $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ — tai parabolės viršūnė, kurios šakos nukreiptos aukštyn ($a > 0$) arba žemyn ($a < 0$)
Dauginamųjų	$a(x - x_1)(x - x_2)$	x_1, x_2 – trinario šaknys; dauginamųjų vaizdavimo būdas neegzistuoja, jei $\Delta < 0$

[a] Prielaida: $a \neq 0$.

n-ojo laipsnio daugianarių lygčių savybės

Formulės lygtims $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

Problema	Taisyklė	Pavyzdys, pastabos
Realiųjų šaknų skaičius[a]	Šaknų skaičius yra lygus lygties laipsniui arba lyginiu šaknų skaičiumi yra mažesnis. Kiekviena nelyginio laipsnio lygtis turi bent vieną realųjį sprendinį	Lygtis $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ tikrai turi realųjį sprendinį; tokių sprendinių gali būti 1, 3 arba 5
Teigiamųjų šaknų skaičius	Toks pats kaip ir lygties koeficientų (a_n, a_{n-1}, …, a_0) ženklų keitimo skaičius arba yra mažesnis lyginiu skaičiumi[b]	Lygties $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ koeficientai nekeičia ženklo, todėl lygtis neturi teigiamų sprendinių
Neigiamųjų šaknų skaičius	Pakeičiame $x \to -x$ ir taikome ankstesnę taisyklę[c]	Lygties $-x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 =$ $= 0$ koeficientai keičia ženklą 5 kartus, todėl lygtis $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ turi 1, 3 arba 5 neigiamus sprendinius
Racionaliosios šaknys	Jei $\frac{p}{q}$ yra nesuprastinama trupmena ir yra lygties šaknis su sveikaisiais koeficientais[e], tai p yra a_0 daliklis, o q yra a_n daliklis	Lygties $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ koeficientai yra sveikieji. Galimos p reikšmės $\pm$ 1, o q reikšmės taip pat $\pm$ 1. Galimas racionalusis sprendinys $\pm$ 1. Įrašę į lygtį apskaičiuojame, kad tik –1 tinka lygčiai
Bezu teorema	Jei x_0 yra lygties $D(x) = 0$ m kartų šaknis, tai $D(x)$ dalijasi iš $(x - x_0)^m$	Teorema leidžia sumažinti lygties laipsnį. Iš gautosios lygties apskaičiuojame likusius sprendinius. Pavyzdžiui, lygtį $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ galima pakeisti lygtimi $(x + 1)(x^4 + x^2 + 1) = 0$
Šaknų suma	$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$	Apibendrintos Vieto formulės[d]
Šaknų sandauga	$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$	Apibendrintos Vieto formulės[d]

[a] jei tariame, kad lygties šaknys gali būti kompleksinės, tai n-ojo laipsnio lygtis visada turi n šaknų (taip formuluojama pagrindinė algebros teorema); [b] Dekarto taisyklė; [c] pakeitę $x \to x - a$, galime patikrinti, kiek yra šaknų, didesnių už duotąją a; [d] formulė teisinga, jei įtrauktos ir kompleksinės šaknys; [e] taip galima užrašyti lygtį su racionaliaisiais koeficientais padauginus ją iš atitinkamo sveikojo skaičiaus

Daugianarės nelygybės (pvz.: $D(x) > 0$)

Problema	Pastabos
Sprendinio išraiška	Intervalų sąjunga (gali būti tuščia aibė arba visa abscisių ašis)
Intervalų rūšys	Nelygybėms $D(x) > 0$ ir $D(x) < 0$ atviri intervalai
	Nelygybėms $D(x) \geq 0$ ir $D(x) \leq 0$ uždari intervalai[a]
Galimi intervalų galai	$+\infty$, $-\infty$ bei skaičiai, kurie yra lygties $D(x) = 0$ sprendiniai
Minimalus intervalų skaičius	0 (lygtis $D(x)$ yra lyginio laipsnio) arba 1 (lygtis $D(x)$ yra nelyginio laipsnio)
Maksimalus intervalų skaičius	$\frac{n}{2} + 1$, kai n lyginis, $\frac{(n+1)}{2}$, kai n nelyginis[b]

[a] arba atviri begaliniai intervalai; [b] n – daugianario $D(x)$ laipsnis

LYGČIŲ SISTEMOS

Dviejų lygčių sistemos su dviem nežinomaisiais sprendimas

Lygtis	Sąlygos	Sprendiniai	Geometrinė interpretacija
$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2+b_2y=c_2 \end{cases}$	$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$	$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$, $y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$	Dviejų tiesių susikirtimo taškas (y, 1-oji lygtis, 2-oji lygtis, O, x)
	$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, $b_2c_1 - b_1c_2 \neq 0$	$x \in \varnothing$	Dvi nesikertančios tiesės — tiesės lygiagrečios (sprendinių nėra) (y, 1-oji lygtis, 2-oji lygtis, O, x)
	$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, $b_2c_1 - b_1c_2 = 0$	Be galo daug sprendinių, tenkinančių vieną lygtį	Tiesės yra sutampančios (y, 1-oji, 2-oji lygtis, O, x)

Lygčių sistemų sprendimas skaičiavimo būdu

Metodas	Paaiškinimas	Sprendimo būdas, kai duota sistema $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-3y=1 \end{cases}$
Pakeitimų metodas[a]	Iš vienos lygties išreiškiame vieną nežinomųjų, o gautą išraišką įrašome į likusias lygtis	Antrąją lygtį galima užrašyti taip: $x = 3y + 1$. Įrašę šią išraišką į pirmąją lygtį, gauname $2(3y + 1) + 3y = 5$; iš čia $9y = 3$ ir $y = \frac{1}{3}$. Įrašę į antrąją lygtį, gauname $x = 3 \cdot \frac{1}{3} + 1 = 2$
Elementariųjų operacijų metodas[b]	Sistemos sprendinys nesikeičia: • jei padauginsime vieną lygčių iš skaičiaus $a \neq 0$ • jei prie vienos lygties pridėsim kitą lygtį • iš vienos lygties atimsime kitą lygtį	Pridėję pirmąją lygtį prie antrosios gauname: $\begin{cases} 3x=6, \\ x-3y=1; \end{cases}$ iš čia lengva apskaičiuoti sprendinius: $x = 2$, $y = \frac{1}{3}$
Determinantų metodas (Kramerio)[c]	Taikome formules $x = \frac{D_x}{D}$; $y = \frac{D_y}{D}$; čia D yra determinantas, sudarytas iš lygčių sistemos koeficientų[de], o D_x, D_y, ... determinantai, gauti iš D, atitinkamus jų stulpelius pakeitus laisvaisiais koeficientais	$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-9$. $D_x=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-18$; $x=\frac{-18}{-9}=2$ $D_y=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3$; $y=\frac{-3}{-9}=\frac{1}{3}$

[a] labai bendras metodas, bet pakankamai greitas; [b] taikant šį metodą dažnai galima greitai išspręsti lygčių sistemą, bet tai priklauso nuo pačios lygčių sistemos bei sprendžiančiojo pastabumo; [c] patogus metodas, pavyzdžiui, įrodinėti teoremas, tačiau reikalauja labai daug skaičiavimų, kai lygčių skaičius didesnis už tris; [d] determinantai – žiūrėti kitą puslapį; [e] jei $D = 0$, tai lygčių sistema neturi sprendinių (jei nors viena reikšmių D_x, D_y, ... nelygi nuliui) arba turi be galo daug sprendinių (jei visi D_x, D_y, ... yra lygūs nuliui)

MATRICOS IR DETERMINANTAI

Matricos apibrėžimas

Matrica – stačiakampė $m \cdot n$ skaičių lentelė, kurią sudaro n eilučių ir m stulpelių.
Atskiri matricos elementai žymimi a_{ij} ($i = 1..n$, $j = 1..m$).

$$[\mathrm{A}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n5} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Matricų rūšys

Pavadinimas	Sąlyga	Paaiškinimai, pastabos	Pavyzdys
Kvadratinė matrica	$m = n$	Stulpelių ir eilučių skaičius yra lygus	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
Diagonalioji matrica[a]	$a_{ij} = 0$, kai $i \neq j$	Visi matricos elementai, išskyrus pagrindinės įstrižainės elementus, yra lygūs nuliui	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$
Simetrinė matrica[a]	$a_{ij} = a_{ji}$	Simetriškai išdėstyti pagrindinės įstrižainės atžvilgiu elementai yra lygūs	$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$
Vienetinė matrica[a]	$a_{ij} = 1$, kai $i = j$; $a_{ij} = 0$, kai $i \neq j$	Visi diagonalieji elementai (t. y. esantys pagrindinėje įstrižainėje) yra lygūs vienetui. Kiti elementai — nuliai	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

[a] tinka tik kvadratinei matricai

Paprastųjų determinantų skaičiavimas

$$|a| = a \qquad \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Pastaba: formulės, skirtos didesniems determinantams apskaičiuoti, yra sudėtingesnės.

Determinantų savybės

Taisyklė	Pavyzdys
Jei duoto determinanto eilutės ar stulpelio visi elementai yra lygūs nuliui, tai ir pats determinantas lygus nuliui	$\begin{vmatrix} 16 & 0 \\ -37 & 0 \end{vmatrix}=0$
Jei bet kurios dvi determinanto eilutės (ar stulpeliai) lygios arba proporcingos, tai determinantas lygus nuliui	$\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}=0$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=0$
Sukeitus eilutes stulpeliais (t. y. transponuojant $a_{ij} \to a_{ji}$) ar stulpelius eilutėmis, determinanto reikšmė nesikeičia	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-1$
Sukeitus dvi gretimas determinanto eilutes arba stulpelius vietomis, determinanto reikšmė keičia ženklą	$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-4$
Bendrą eilutės ar stulpelio daugianamąjį galima iškelti prieš determinantą	$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=18$
Sudėjus arba atėmus dvi determinanto eilutes arba stulpelius, determinanto reikšmė nekeičia ženklo	$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4$

LOGARITMAI

Skaičiaus x logaritmo pagrindu a apibrėžimas

$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$ (čia ir kitose formulėse sutarta, kad $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$)

Pagrindinės logaritmų savybės

$\log_a 1 = 0$ $\quad\quad \log_a a = 1$

$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\quad\quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^y = y \log_a x$ $\quad\quad \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$

Logaritmo pagrindo keitimas

$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$

Dešimtainis logaritmas $\quad$ **Natūralusis logaritmas**

$\log x = \log_{10} x$ $\quad\quad \ln x = \log_e x$ ($e = 2{,}718...$) $\quad \ln x = \ln 10 \cdot \log x \approx 2{,}303 \log x$

NATŪRALIŲJŲ LOGARITMŲ LENTELĖ

x	Lentelėje rasite šių skaičių natūraliųjų logaritmų reikšmes									
	x + 0,00	x + 0,05	x + 0,10	x + 0,15	x + 0,20	x + 0,25	x + 0,30	x + 0,35	x + 0,40	x + 0,45
1,00	0,0000	0,0488	0,0953	0,1398	0,1823	0,2231	0,2624	0,3001	0,3365	0,3716
1,50	0,4055	0,4383	0,4700	0,5008	0,5306	0,5596	0,5878	0,6152	0,6419	0,6678
2,00	0,6931	0,7178	0,7419	0,7655	0,7885	0,8109	0,8329	0,8544	0,8755	0,8961
2,50	0,9163	0,9361	0,9555	0,9746	0,9933	1,0116	1,0296	1,0473	1,0647	1,0818
3,00	1,0986	1,1151	1,1314	1,1474	1,1632	1,1787	1,1939	1,2090	1,2238	1,2384
3,50	1,2528	1,2669	1,2809	1,2947	1,3083	1,3218	1,3350	1,3481	1,3610	1,3737
4,00	1,3863	1,3987	1,4110	1,4231	1,4351	1,4469	1,4586	1,4702	1,4816	1,4929
4,50	1,5041	1,5151	1,5261	1,5369	1,5476	1,5581	1,5686	1,5790	1,5892	1,5994
5,00	1,6094	1,6194	1,6292	1,6390	1,6487	1,6582	1,6677	1,6771	1,6864	1,6956
5,50	1,7047	1,7138	1,7228	1,7317	1,7405	1,7492	1,7579	1,7664	1,7750	1,7834
6,00	1,7918	1,8001	1,8083	1,8165	1,8245	1,8326	1,8405	1,8485	1,8563	1,8641
6,50	1,8718	1,8795	1,8871	1,8946	1,9021	1,9095	1,9169	1,9242	1,9315	1,9387
7,00	1,9459	1,9530	1,9601	1,9671	1,9741	1,9810	1,9879	1,9947	2,0015	2,0082
7,50	2,0149	2,0215	2,0281	2,0347	2,0412	2,0477	2,0541	2,0605	2,0669	2,0732
8,00	2,0794	2,0857	2,0919	2,0980	2,1041	2,1102	2,1163	2,1223	2,1282	2,1342
8,50	2,1401	2,1459	2,1518	2,1576	2,1633	2,1691	2,1748	2,1804	2,1861	2,1917
9,00	2,1972	2,2028	2,2083	2,2138	2,2192	2,2246	2,2300	2,2354	2,2407	2,2460
9,50	2,2513	2,2565	2,2618	2,2670	2,2721	2,2773	2,2824	2,2875	2,2925	2,2976

Norint apskaičiuoti $\ln x$, logaritmuojamą skaičių x reikia išreikšti taip: $x = y \cdot 10^n$ (čia $1 \leq y < 10$, n – sveikasis skaičius), toliau taikome tokią formulę $\ln x = \ln (y \cdot 10^n) = \ln y + n \ln 10$. $\ln y$ randame iš lentelių, $\ln 10 = 2{,}302585...$ (tikslesnė reikšmė, žr. p. 7). Jei y labai artimas vienetui, tai galima taikyti tokią formulę $\ln (1 + a) \approx a$ (tikslesnė formulė, žr. p. 37).

Pavyzdžiai:

$\ln 550 = \ln (5{,}5 \cdot 10^2) = \ln 5{,}5 + 2 \ln 10 \approx 1{,}7047 + 2 \cdot 2{,}3026 \approx 6{,}310;$

$\ln 0{,}002 = \ln (2 \cdot 10^{-3}) \approx \ln 2 - 3 \ln 10 \approx 0{,}6931 - 3 \cdot 2{,}3026 \approx -6{,}215;$

$\ln 0{,}99995 = \ln (1 - 0{,}00005) \approx -0{,}00005.$

DEŠIMTAINIŲ LOGARITMŲ LENTELĖ

x	Lentelėje rasite šių skaičių dešimtainių logaritmų reikšmes									
	x + 0,00	x + 0,01	x + 0,02	x + 0,03	x + 0,04	x + 0,05	x + 0,06	x + 0,07	x + 0,08	x + 0,09
1,0	**0,0000**	**0,0043**	**0,0086**	**0,0128**	**0,0170**	**0,0212**	**0,0253**	**0,0294**	**0,0334**	**0,0374**
1,1	0,0414	0,0453	0,0492	0,0531	0,0569	0,0607	0,0645	0,0682	0,0719	0,0755
1,2	0,0792	0,0828	0,0864	0,0899	0,0934	0,0969	0,1004	0,1038	0,1072	0,1106
1,3	0,1139	0,1173	0,1206	0,1239	0,1271	0,1303	0,1335	0,1367	0,1399	0,1430
1,4	0,1461	0,1492	0,1523	0,1553	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1732
1,5	0,1761	0,1790	0,1818	0,1847	0,1875	0,1903	0,1931	0,1959	0,1987	0,2014
1,6	0,2041	0,2068	0,2095	0,2122	0,2148	0,2175	0,2201	0,2227	0,2253	0,2279
1,7	0,2304	0,2330	0,2355	0,2380	0,2405	0,2430	0,2455	0,2480	0,2504	0,2529
1,8	0,2553	0,2577	0,2601	0,2626	0,2648	0,2672	0,2695	0,2718	0,2742	0,2765
1,9	0,2788	0,2810	0,2833	0,2856	0,2878	0,2900	0,2923	0,2945	0,2967	0,2989
2,0	**0,3010**	**0,3032**	**0,3054**	**0,3075**	**0,3096**	**0,3118**	**0,3139**	**0,3160**	**0,3181**	**0,3201**
2,1	0,3222	0,3243	0,3263	0,3284	0,3304	0,3324	0,3345	0,3365	0,3385	0,3404
2,2	0,3424	0,3444	0,3464	0,3483	0,3502	0,3522	0,3541	0,3560	0,3579	0,3598
2,3	0,3617	0,3636	0,3655	0,3674	0,3692	0,3711	0,3729	0,3747	0,3766	0,3784
2,4	0,3802	0,3820	0,3838	0,3856	0,3874	0,3892	0,3909	0,3927	0,3945	0,3962
2,5	0,3973	0,3997	0,4014	0,4031	0,4048	0,4065	0,4082	0,4099	0,4116	0,4133
2,6	0,4150	0,4166	0,4183	0,4200	0,4216	0,4232	0,4249	0,4265	0,4281	0,4298
2,7	0,4314	0,4330	0,4346	0,4362	0,4378	0,4393	0,4409	0,4425	0,4440	0,4456
2,8	0,4472	0,4487	0,4502	0,4518	0,4533	0,4548	0,4564	0,4579	0,4594	0,4609
2,9	0,4624	0,4639	0,4654	0,4669	0,4683	0,4698	0,4713	0,4728	0,4742	0,4757
3,0	**0,4771**	**0,4786**	**0,4800**	**0,4814**	**0,4829**	**0,4843**	**0,4857**	**0,4871**	**0,4886**	**0,4900**
3,1	0,4914	0,4928	0,4942	0,4955	0,4969	0,4983	0,4997	0,5011	0,5024	0,5038
3,2	0,5051	0,5065	0,5079	0,5092	0,5105	0,5119	0,5132	0,5145	0,5159	0,5172
3,3	0,5185	0,5198	0,5211	0,5224	0,5237	0,5250	0,5263	0,5276	0,5289	0,5302
3,4	0,5315	0,5328	0,5340	0,5353	0,5366	0,5378	0,5391	0,5403	0,5416	0,5428
3,5	0,5441	0,5453	0,5465	0,5478	0,5490	0,5502	0,5514	0,5527	0,5539	0,5551
3,6	0,5563	0,5575	0,5587	0,5599	0,5611	0,5623	0,5635	0,5647	0,5658	0,5670
3,7	0,5682	0,5694	0,5705	0,5717	0,5729	0,5740	0,5752	0,5763	0,5775	0,5786
3,8	0,5798	0,5809	0,5821	0,5832	0,5843	0,5855	0,5866	0,5877	0,5888	0,5899
3,9	0,5911	0,5922	0,5933	0,5944	0,5955	0,5966	0,5977	0,5988	0,5999	0,6010
4,0	**0,6021**	**0,6031**	**0,6042**	**0,6053**	**0,6064**	**0,6075**	**0,6085**	**0,6096**	**0,6107**	**0,6117**
4,1	0,6128	0,6138	0,6149	0,6160	0,6170	0,6180	0,6191	0,6201	0,6212	0,6222
4,2	0,6232	0,6243	0,6253	0,6263	0,6274	0,6284	0,6294	0,6304	0,6314	0,6325
4,3	0,6335	0,6345	0,6355	0,6365	0,6375	0,6385	0,6395	0,6405	0,6415	0,6425
4,4	0,6435	0,6444	0,6454	0,6464	0,6474	0,6484	0,6493	0,6503	0,6513	0,6522
4,5	0,6532	0,6542	0,6551	0,6561	0,6571	0,6580	0,6590	0,6599	0,6609	0,6618
4,6	0,6628	0,6637	0,6646	0,6656	0,6665	0,6675	0,6684	0,6693	0,6702	0,6712
4,7	0,6721	0,6730	0,6739	0,6749	0,6758	0,6767	0,6776	0,6785	0,6794	0,6803
4,8	0,6812	0,6821	0,6830	0,6839	0,6848	0,6857	0,6866	0,6875	0,6884	0,6893
4,9	0,6902	0,6911	0,6920	0,6928	0,6937	0,6946	0,6955	0,6964	0,6972	0,6981
5,0	**0,6990**	**0,6998**	**0,7007**	**0,7016**	**0,7024**	**0,7033**	**0,7042**	**0,7050**	**0,7059**	**0,7067**
5,1	0,7076	0,7084	0,7093	0,7101	0,7110	0,7118	0,7126	0,7135	0,7143	0,7152
5,2	0,7160	0,7168	0,7177	0,7185	0,7193	0,7202	0,7210	0,7218	0,7226	0,7235
5,3	0,7243	0,7251	0,7259	0,7267	0,7275	0,7284	0,7292	0,7300	0,7308	0,7316
5,4	0,7324	0,7332	0,7340	0,7348	0,7356	0,7364	0,7372	0,7380	0,7388	0,7396
5,5	0,7404	0,7412	0,7419	0,7427	0,7435	0,7443	0,7451	0,7459	0,7466	0,7474
5,6	0,7482	0,7490	0,7497	0,7505	0,7513	0,7520	0,7528	0,7536	0,7543	0,7551
5,7	0,7559	0,7566	0,7574	0,7582	0,7589	0,7597	0,7604	0,7612	0,7619	0,7627
5,8	0,7634	0,7642	0,7649	0,7657	0,7664	0,7672	0,7679	0,7686	0,7694	0,7701
5,9	0,7709	0,7716	0,7723	0,7731	0,7738	0,7745	0,7752	0,7760	0,7767	0,7774

x	Lentelėje rasite šių skaičių dešimtainių logaritmų reikšmes									
	$x + 0{,}00$	$x + 0{,}01$	$x + 0{,}02$	$x + 0{,}03$	$x + 0{,}04$	$x + 0{,}05$	$x + 0{,}06$	$x + 0{,}07$	$x + 0{,}08$	$x + 0{,}09$
6,0	**0,7782**	**0,7789**	**0,7796**	**0,7803**	**0,7810**	**0,7818**	**0,7825**	**0,7832**	**0,7839**	**0,7846**
6,1	0,7853	0,7860	0,7868	0,7875	0,7882	0,7889	0,7896	0,7903	0,7910	0,7917
6,2	0,7924	0,7931	0,7938	0,7945	0,7952	0,7959	0,7966	0,7973	0,7980	0,7987
6,3	0,7993	0,8000	0,8007	0,8014	0,8021	0,8028	0,8035	0,8041	0,8048	0,8055
6,4	0,8062	0,8069	0,8075	0,8082	0,8089	0,8096	0,8102	0,8109	0,8116	0,8122
6,5	0,8129	0,8136	0,8142	0,8149	0,8156	0,8162	0,8169	0,8176	0,8182	0,8189
6,6	0,8195	0,8202	0,8209	0,8215	0,8222	0,8228	0,8235	0,8241	0,8248	0,8254
6,7	0,8261	0,8267	0,8274	0,8280	0,8287	0,8293	0,8299	0,8306	0,8312	0,8319
6,8	0,8325	0,8331	0,8338	0,8344	0,8351	0,8357	0,8363	0,8370	0,8376	0,8382
6,9	0,8388	0,8395	0,8401	0,8407	0,8144	0,8420	0,8426	0,8432	0,8439	0,8445
7,0	**0,8451**	**0,8457**	**0,8463**	**0,8470**	**0,8476**	**0,8482**	**0,8488**	**0,8494**	**0,8500**	**0,8506**
7,1	0,8513	0,8519	0,8525	0,8531	0,8537	0,8543	0,8549	0,8555	0,8561	0,8567
7,2	0,8573	0,8579	0,8585	0,8591	0,8597	0,8603	0,8609	0,8615	0,8621	0,8627
7,3	0,8633	0,8639	0,8645	0,8651	0,8657	0,8663	0,8669	0,8675	0,8681	0,8686
7,4	0,8692	0,8698	0,8704	0,8710	0,8716	0,8722	0,8727	0,8733	0,8739	0,8745
7,5	0,8751	0,8756	0,8762	0,8768	0,8774	0,8779	0,8785	0,8791	0,8797	0,8802
7,6	0,8808	0,8814	0,8820	0,8825	0,8831	0,8837	0,8842	0,8848	0,8854	0,8859
7,7	0,8865	0,8871	0,8876	0,8882	0,8887	0,8893	0,8899	0,8904	0,8910	0,8915
7,8	0,8921	0,8927	0,8932	0,8938	0,8943	0,8949	0,8954	0,8960	0,8965	0,8971
7,9	0,8976	0,8982	0,8987	0,8993	0,8998	0,9004	0,9009	0,9015	0,9020	0,9025
8,0	**0,9031**	**0,9036**	**0,9042**	**0,9047**	**0,9053**	**0,9058**	**0,9063**	**0,9069**	**0,9074**	**0,9079**
8,1	0,9085	0,9090	0,9096	0,9101	0,9106	0,9112	0,9117	0,9122	0,9128	0,9133
8,2	0,9138	0,9143	0,9149	0,9154	0,9159	0,9165	0,9170	0,9175	0,9180	0,9186
8,3	0,9191	0,9196	0,9201	0,9206	0,9212	0,9217	0,9222	0,9227	0,9232	0,9238
8,4	0,9243	0,9248	0,9253	0,9258	0,9263	0,9269	0,9274	0,9279	0,9284	0,9289
8,5	0,9294	0,9299	0,9304	0,9309	0,9315	0,9320	0,9325	0,9330	0,9335	0,9340
8,6	0,9345	0,9350	0,9355	0,9360	0,9365	0,9370	0,9375	0,9380	0,9385	0,9390
8,7	0,9395	0,9400	0,9405	0,9410	0,9415	0,9420	0,9425	0,9430	0,9435	0,9440
8,8	0,9445	0,9450	0,9455	0,9460	0,9465	0,9469	0,9474	0,9479	0,9484	0,9489
8,9	0,9494	0,9499	0,9504	0,9509	0,9513	0,9518	0,9523	0,9528	0,9533	0,9538
9,0	**0,9542**	**0,9547**	**0,9552**	**0,9557**	**0,9562**	**0,9566**	**0,9571**	**0,9576**	**0,9581**	**0,9586**
9,1	0,9590	0,9595	0,9600	0,9605	0,9609	0,9614	0,9619	0,9624	0,9628	0,9633
9,2	0,9638	0,9643	0,9647	0,9652	0,9657	0,9661	0,9666	0,9671	0,9675	0,9680
9,3	0,9685	0,9689	0,9694	0,9699	0,9703	0,9708	0,9713	0,9717	0,9722	0,9727
9,4	0,9731	0,9736	0,9741	0,9745	0,9750	0,9754	0,9759	0,9763	0,9768	0,9773
9,5	0,9777	0,9782	0,9786	0,9791	0,9795	0,9800	0,9805	0,9809	0,9814	0,9818
9,6	0,9823	0,9827	0,9832	0,9836	0,9841	0,9845	0,9850	0,9854	0,9859	0,9863
9,7	0,9868	0,9872	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	0,9908
9,8	0,9912	0,9917	0,9921	0,9926	0,9930	0,9934	0,9939	0,9943	0,9948	0,9952
9,9	0,9956	0,9961	0,9965	0,9969	0,9974	0,9978	0,9983	0,9987	0,9991	0,9996
10,0	**1,0000**	**1,0004**	**1,0009**	**1,0013**	**1,0017**	**1,0022**	**1,0026**	**1,0030**	**1,0035**	**1,0039**

Norint apskaičiuoti $\log x$, logaritmuojamą skaičių x reikia išreikšti taip: $x = y \cdot 10^n$ (čia $1 \leq y \leq 10$, n – sveikasis skaičius); toliau taikome tokią formulę $\log x = \log (y \cdot 10^n) = \log y + n$. $\log y$ randame lentelėse.

Jei y labai artimas vienetui, tai galima taikyti tokią formulę $\log (1 + a) \approx a \log_{10} e = a/\ln 10 \approx 0{,}4343\, a$ (tikslesnė $\ln 10$ ir $\log_{10} e$ reikšmė, žr. p. 7).

Pavyzdžiai:

$\log 6{,}29 = 0{,}7987$;

$\log 195 = \log (1{,}95 \cdot 10^2) = \log 1{,}95 + \log 10^2 = 0{,}2900 + 2 = 2{,}2900$;

$\log 0{,}834 = \log (8{,}34 \cdot 10^{-1}) = \log 8{,}34 + \log 10^{-1} = 0{,}9212 + (-1) = -0{,}0788$.

ANTILOGARITMAI

x	10^x	10^{-x}	e^x	e^{-x}	x	10^x	10^{-x}	e^x	e^{-x}
0,00	**1,0000**	**1,0000**	**1,0000**	**1,0000**	**0,50**	**3,1623**	**0,3162**	**1,6487**	**0,6065**
0,01	1,0233	0,9772	1,0101	0,9900	0,51	3,2359	0,3090	1,6653	0,6005
0,02	1,0471	0,9550	1,0202	0,9802	0,52	3,3113	0,3020	1,6820	0,5945
0,03	1,0715	0,9333	1,0305	0,9704	0,53	3,3884	0,2951	1,6989	0,5886
0,04	1,0965	0,9120	1,0408	0,9608	0,54	3,4674	0,2884	1,7160	0,5827
0,05	1,1220	0,8913	1,0513	0,9512	0,55	3,5481	0,2818	1,7333	0,5769
0,06	1,1482	0,8710	1,0618	0,9418	0,56	3,6308	0,2754	1,7507	0,5712
0,07	1,1749	0,8511	1,0725	0,9324	0,57	3,7154	0,2692	1,7683	0,5655
0,08	1,2023	0,8318	1,0833	0,9231	0,58	3,8019	0,2630	1,7860	0,5599
0,09	1,2303	0,8128	1,0942	0,9139	0,59	3,8905	0,2570	1,8040	0,5543
0,10	**1,2589**	**0,7943**	**1,1052**	**0,9048**	**0,60**	**3,9811**	**0,2512**	**1,8221**	**0,5488**
0,11	1,2882	0,7762	1,1163	0,8958	0,61	4,0738	0,2455	1,8404	0,5434
0,12	1,3183	0,7586	1,1275	0,8869	0,62	4,1687	0,2399	1,8589	0,5379
0,13	1,3490	0,7413	1,1388	0,8781	0,63	4,2658	0,2344	1,8776	0,5326
0,14	1,3804	0,7244	1,1503	0,8694	0,64	4,3652	0,2291	1,8965	0,5273
0,15	1,4125	0,7079	1,1618	0,8607	0,65	4,4668	0,2239	1,9155	0,5220
0,16	1,4454	0,6918	1,1735	0,8521	0,66	4,5709	0,2188	1,9348	0,5169
0,17	1,4791	0,6761	1,1853	0,8437	0,67	4,6774	0,2138	1,9542	0,5117
0,18	1,5136	0,6607	1,1972	0,8353	0,68	4,7863	0,2089	1,9739	0,5066
0,19	1,5488	0,6457	1,2092	0,8270	0,69	4,8978	0,2042	1,9937	0,5016
0,20	**1,5849**	**0,6310**	**1,2214**	**0,8187**	**0,70**	**5,0119**	**0,1995**	**2,0138**	**0,4966**
0,21	1,6218	0,6166	1,2337	0,8106	0,71	5,1286	0,1950	2,0340	0,4946
0,22	1,6596	0,6026	1,2461	0,8025	0,72	5,2481	0,1905	2,0544	0,4868
0,23	1,6982	0,5888	1,2586	0,7945	0,73	5,3703	0,1862	2,0751	0,4819
0,24	1,7378	0,5754	1,2712	0,7866	0,74	5,4954	0,1820	2,0959	0,4771
0,25	1,7783	0,5623	1,2840	0,7788	0,75	5,6234	0,1778	2,1170	0,4724
0,26	1,8197	0,5495	1,2969	0,7711	0,76	5,7544	0,1738	2,1383	0,4677
0,27	1,8621	0,5370	1,3100	0,7634	0,77	5,8884	0,1698	2,1598	0,4630
0,28	1,9055	0,5248	1,3231	0,7558	0,78	6,0256	0,1660	2,1815	0,4584
0,29	1,9498	0,5129	1,3364	0,7483	0,79	6,1660	0,1622	2,2034	0,4538
0,30	**1,9953**	**0,5012**	**1,3499**	**0,7408**	**0,80**	**6,3096**	**0,1585**	**2,2255**	**0,4493**
0,31	2,0417	0,4898	1,3634	0,7334	0,81	6,4565	0,1549	2,2479	0,4449
0,32	2,0893	0,4786	1,3771	0,7261	0,82	6,6069	0,1514	2,2705	0,4404
0,33	2,1380	0,4677	1,3910	0,7189	0,83	6,7608	0,1479	2,2933	0,4360
0,34	2,1878	0,4571	1,4049	0,7118	0,84	6,9183	0,1445	2,3164	0,4317
0,35	2,2387	0,4467	1,4191	0,7047	0,85	7,0795	0,1413	2,3396	0,4274
0,36	2,2909	0,4365	1,4333	0,6977	0,86	7,2444	0,1380	2,3632	0,4232
0,37	2,3442	0,4266	1,4477	0,6908	0,87	7,4131	0,1349	2,3869	0,4190
0,38	2,3988	0,4169	1,4623	0,6839	0,88	7,5858	0,1318	2,4109	0,4148
0,39	2,4547	0,4074	1,4770	0,6771	0,89	7,7625	0,1288	2,4351	0,4107
0,40	**2,5119**	**0,3981**	**1,4918**	**0,6703**	**0,90**	**7,9433**	**0,1259**	**2,4596**	**0,4066**
0,41	2,5704	0,3890	1,5068	0,6637	0,91	8,1283	0,1230	2,4843	0,4025
0,42	2,6303	0,3802	1,5220	0,6570	0,92	8,3176	0,1202	2,5093	0,3985
0,43	2,6915	0,3715	1,5373	0,6505	0,93	8,5114	0,1175	2,5345	0,3946
0,44	2,7542	0,3631	1,5527	0,6440	0,94	8,7096	0,1148	2,5600	0,3906
0,45	2,8184	0,3548	1,5683	0,6373	0,95	8,9125	0,1122	2,5857	0,3867
0,46	2,8840	0,3467	1,5841	0,6313	0,96	9,1201	0,1096	2,6117	0,3829
0,47	2,9512	0,3388	1,6000	0,6250	0,97	9,3325	0,1072	2,6379	0,3791
0,48	3,0200	0,3311	1,6161	0,6188	0,98	9,5499	0,1047	2,6645	0,3753
0,49	3,0903	0,3236	1,6323	0,6126	0,99	9,7724	0,1023	2,6912	0,3716

Pavyzdžiai:

Jeigu $\log x = 6{,}23$, tai $x = 10^{6,23} = 10^{0,23} \cdot 10^6 \approx 1{,}6982 \cdot 10^6$;

Jeigu $\log x = -6{,}23$, tai $x = {}^{10-6,23} = 10^{-0,23} \cdot 10^6 \approx 0{,}5888 \cdot 10^{-6} = 5{,}888 \cdot 10^{-7}$;

Jeigu $\ln x = 6{,}23$, tai $x = e^{6,23} = 10^{6,23/\ln 10} = 10^{6,23/2,303} = 10^{2,71} = 10^{0,71} \cdot 10^2 \approx 513$.

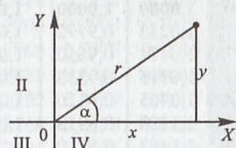
TRIGONOMETRINĖS FUNKCIJOS

Apibrėžimai

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$ $\qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$ $\qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y}\ (y \neq 0)$

$\sec\alpha = \frac{r}{x}\ (x \neq 0)$ $\qquad \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{r}{y}\ (y \neq 0)$



Pagrindinės formulės

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$$

Duotų kampų trigonometrinių funkcijų reikšmės

α		sin α	cos α	tg α	ctg α
Radianai	Laipsniai				
0	0	0	1	0	—
$\frac{\pi}{12}$	15	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{10}$	18	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{8}$	$22\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
$\frac{\pi}{6}$	30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5}{12}\pi$	75	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90	1	0	—	0
$\frac{2}{3}\pi$	120	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3}{4}\pi$	135	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	−1	−1
π	180	0	−1	0	—
$\frac{3}{2}\pi$	270	−1	0	—	0
2π	360	0	1	0	

Redukcijos formulės

φ		sin φ	cos φ	tg φ	ctg φ
−α	−α	−sin α	cos α	−tg α	−ctg α
90° + α	π/2 + α	cos α	−sin α	−ctg α	−tg α
90° − α	π/2 − α	cos α	sin α	ctg α	tg α
180° + α	π + α	−sin α	−cos α	tg α	ctg α
180° − α	π − α	sin α	−cos α	−tg α	−ctg α
270° + α	3/2π + α	−cos α	sin α	−ctg α	−tg α
270° − α	3/2π − α	−cos α	−sin α	ctg α	tg α
360° + α	2π + α	sin α	cos α	tg α	ctg α
360° − α	2π − α	−sin α	cos α	−tg α	−ctg α

Pavyzdys: $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$

Dvigubo kampo funkcijos

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{2}{\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha} \qquad \mathrm{ctg}\,2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha} = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha}{2}$$

Pastaba! Čia ir visose kitose formulėse tariame, kad visos išraiškos yra apibrėžtos.

Pusinės kampo funkcijos

Funkcija	Formulė	Rezultato ženklas, kai $\frac{\alpha}{2}$ yra ketvirtyje:			
		I	II	III	IV
$\sin\frac{\alpha}{2}$	$\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$	+	+	−	−
$\cos\frac{\alpha}{2}$	$\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$	+	−	−	+
$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$	$\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$	+	−	+	−
$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$	$\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$	+	−	+	−

Kampų sumos ir skirtumo funkcijos

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\qquad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\qquad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$ $\qquad \mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$

$\mathrm{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta - 1}{\mathrm{ctg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\alpha}$ $\qquad \mathrm{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta + 1}{\mathrm{ctg}\,\beta - \mathrm{ctg}\,\alpha}$

Sumos ir skirtumo trigonometrinės funkcijos

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2}\cos(45^\circ - \alpha)$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2}\sin(45^\circ - \alpha)$$

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$

Funkcijų sandaugos

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

Funkcijos ir vieneto suma bei skirtumas

$$1 + \sin\alpha = 2\sin^2\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$1 - \sin\alpha = 2\cos^2\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Trigubo kampo funkcijos

$$\sin 3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,3\alpha = \frac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3\,\mathrm{tg}^2\alpha}$$

$$\mathrm{ctg}\,3\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^3\alpha - 3\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{3\,\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}$$

Kitos formulės

Jeigu $t = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, tai: $\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$

ATVIRKŠTINĖS TRIGONOMETRINĖS FUNKCIJOS

Vienų funkcijų keitimas kitomis

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \mathrm{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \mathrm{arc\,ctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\mathrm{arc\,tg}\,x = -\mathrm{arc\,tg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arc\,ctg}\,x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\mathrm{arc\,ctg}\,x = \pi - \mathrm{arc\,ctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arc\,tg}\,x = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Žemiau esančios formulės teisingos, kai $x > 0$

$$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \mathrm{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \mathrm{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\mathrm{arc\,tg}\,x = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{arc\,ctg}\frac{1}{x}$$

$$\mathrm{arc\,ctg}\,x = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{arc\,tg}\frac{1}{x}$$

Funkcijų sumos ir skirtumai

$$\mathrm{arc\,tg}\,x + \mathrm{arc\,tg}\,y = A + \mathrm{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy} \qquad A = \begin{cases} 0, \text{ kai } x\cdot y < 1 \\ \pi, \text{ kai } x\cdot y > 1 \text{ bei } x > 0 \\ -\pi, \text{ kai } x\cdot y > 1 \text{ bei } x < 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{arc\,tg}\,x - \mathrm{arc\,tg}\,y = A + \mathrm{arc\,tg}\frac{x-y}{1+xy} \qquad A = \begin{cases} 0, \text{ kai } x\cdot y > -1 \\ \pi, \text{ kai } x\cdot y < -1 \text{ bei } x > 0 \\ -\pi, \text{ kai } x\cdot y < -1 \text{ bei } x < 0 \end{cases}$$

$$\arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \text{ kai } x\cdot y \le 0 \text{ arba } x^2+y^2 \le 1 \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \text{ kai } x>0,\ y>0 \text{ ir } x^2+y^2 > 1 \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \text{ kai } x<0,\ y<0 \text{ ir } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

$$\arcsin x - \arcsin y = \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), \text{ kai } x\cdot y \ge 0 \text{ arba } x^2+y^2 \le 1 \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), \text{ kai } x>0,\ y<0 \text{ ir } x^2+y^2 > 1 \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), \text{ kai } x<0,\ y>0 \text{ ir } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

$$\arccos x + \arccos y = \begin{cases} \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right), \text{ kai } x+y \ge 0 \\ 2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right), \text{ kai } x+y < 0 \end{cases}$$

$$\arccos x - \arccos y = \begin{cases} \arccos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right), \text{ kai } x < y \\ -\arccos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right), \text{ kai } x \ge y \end{cases}$$

TRIGONOMETRINIŲ IR ATVIRKŠTINIŲ TRIGONOMETRINIŲ FUNKCIJŲ GRAFIKAI

Funkcija $y = \sin x$
Apibrėžimo sritis: $x \in \boldsymbol{R}$; $y \in [-1, 1]$;
periodas 2π;
nuliai $x = k\pi$. Maksimumai $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi, 1\right)$,
minimumai $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, -1\right)$

Funkcija $y = \cos x$
Apibrėžimo sritis: $x \in \boldsymbol{R}$; $y \in [-1, 1]$;
periodas 2π;
nuliai $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
Maksimumai $(2k\pi, 1)$,
minimumai $((2k - 1)\pi, -1)$

Funkcija $y = \mathrm{tg}\, x$
Apibrėžimo sritis: $x \in \boldsymbol{R} - \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$; $y \in \boldsymbol{R}$;
periodas π;
nuliai $x = k\pi$; vertikalios asimptotės $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; funkcija didėja visoje apibrėžimo srityje

Funkcija $y = \mathrm{ctg}\, x$
Apibrėžimo sritis: $x \in \boldsymbol{R} - \{k\pi\}$; $y \in \boldsymbol{R}$;
periodas π;
nuliai $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; vertikalios asimptotės $x = k\pi$; funkcija mažėja visoje apibrėžimo srityje

Funkcija $y = \arcsin x$
Apibrėžimo sritis: $x \in [-1, 1]$; $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^{a}$;
nuliai $x = 0$;
funkcija didėja visoje apibrėžimo srityje[a]

Funkcija $y = \arccos x$
Apibrėžimo sritis: $x \in [-1, 1]$; $y \in [0, \pi]^{a}$;
nuliai $x = 1$;
funkcija mažėja visoje apibrėžimo srityje[a]

Funkcija $y = \mathrm{arc\,tg}\, x$
Apibrėžimo sritis: $x \in \boldsymbol{R}$; $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^{a}$;
nuliai $x = 0$; horizontalios asimptotės $y = \pm\frac{\pi}{2}$;
funkcija auga visoje apibrėžimo srityje

Funkcija $y = \mathrm{arc\,ctg}\, x$
Apibrėžimo sritis: $x \in \boldsymbol{R}$; $y \in [0, \pi]^{a}$;
nuliai $x = 0$; horizontalios asimptotės $y = 0$ ir $y = \pi$;
funkcija mažėja visoje apibrėžimo srityje

k — sveikasis skaičius (…, −2, −1, 0, 1, 2, …). [a] čia nenagrinėjam daugiareikšmių funkcijų …

TRIGONOMETRINIŲ FUNKCIJŲ LENTELĖS

α [°]	α [rad]	sin α cos β	tg α ctg β	β [°]
0°00′	**0,0000**	**0,0000**	**0,0000**	**90°00′**
0°10′	0,0029	0,0029	0,0029	89°50′
0°20′	0,0058	0,0058	0,0058	89°40′
0°30′	0,0087	0,0087	0,0087	89°30′
0°40′	0,0116	0,0116	0,0116	89°20′
0°50′	0,0145	0,0145	0,0145	89°10′
1°00′	**0,0175**	**0,0175**	**0,0175**	**89°00′**
1°10′	0,0204	0,0204	0,0204	88°50′
1°20′	0,0233	0,0233	0,0233	88°40′
1°30′	0,0262	0,0262	0,0262	88°30′
1°40′	0,0291	0,0291	0,0291	88°20′
1°50′	0,0320	0,0320	0,0320	88°10′
2°00′	**0,0349**	**0,0349**	**0,0349**	**88°00′**
2°10′	0,0378	0,0378	0,0378	87°50′
2°20′	0,0407	0,0407	0,0407	87°40′
2°30′	0,0436	0,0436	0,0437	87°30′
2°40′	0,0465	0,0465	0,0466	87°20′
2°50′	0,0495	0,0494	0,0495	87°10′
3°00′	**0,0524**	**0,0523**	**0,0524**	**87°00′**
3°10′	0,0553	0,0552	0,0553	86°50′
3°20′	0,0582	0,0581	0,0582	86°40′
3°30′	0,0611	0,0610	0,0612	86°30′
3°40′	0,0640	0,0640	0,0641	86°20′
3°50′	0,0669	0,0669	0,0670	86°10′
4°00′	**0,0698**	**0,0698**	**0,0699**	**86°00′**
4°10′	0,0727	0,0727	0,0729	85°50′
4°20′	0,0756	0,0756	0,0758	85°40′
4°30′	0,0785	0,0785	0,0787	85°30′
4°40′	0,0814	0,0814	0,0816	85°20′
4°50′	0,0844	0,0843	0,0846	85°10′
5°00′	**0,0873**	**0,0872**	**0,0875**	**85°00′**
5°10′	0,0902	0,0901	0,0904	84°50′
5°20′	0,0931	0,0929	0,0934	84°40′
5°30′	0,0960	0,0958	0,0963	84°30′
5°40′	0,0989	0,0987	0,0992	84°20′
5°50′	0,1018	0,1016	0,1022	84°10′
6°00′	**0,1047**	**0,1045**	**0,1051**	**84°00′**
6°10′	0,1076	0,1074	0,1080	83°50′
6°20′	0,1105	0,1103	0,1110	83°40′
6°30′	0,1134	0,1132	0,1139	83°30′
6°40′	0,1164	0,1161	0,1169	83°20′
6°50′	0,1193	0,1190	0,1198	83°10′
7°00′	**0,1222**	**0,1219**	**0,1228**	**83°00′**
7°10′	0,1251	0,1248	0,1257	82°50′
7°20′	0,1280	0,1276	0,1287	82°40′
7°30′	0,1309	0,1305	0,1317	82°30′
7°40′	0,1338	0,1334	0,1346	82°20′
7°50′	0,1367	0,1363	0,1376	82°10′
8°00′	**0,1396**	**0,1392**	**0,1405**	**82°00′**
8°10′	0,1425	0,1421	0,1435	81°50′
8°20′	0,1454	0,1449	0,1465	81°40′
8°30′	0,1484	0,1478	0,1495	81°30′
8°40′	0,1513	0,1507	0,1524	81°20′
8°50′	0,1542	0,1536	0,1554	81°10′

α [°]	α [rad]	sin α cos β	tg α ctg β	β [°]
9°00′	**0,1571**	**0,1564**	**0,1584**	**81°00′**
9°10′	0,1600	0,1593	0,1614	80°50′
9°20′	0,1629	0,1622	0,1644	80°40′
9°30′	0,1658	0,1650	0,1673	80°30′
9°40′	0,1687	0,1676	0,1703	80°20′
9°50′	0,1716	0,1708	0,1733	80°10′
10°00′	**0,1745**	**0,1736**	**0,1763**	**80°00′**
10°10′	0,1774	0,1765	0,1793	79°50′
10°20′	0,1804	0,1794	0,1823	79°40′
10°30′	0,1833	0,1822	0,1853	79°30′
10°40′	0,1862	0,1851	0,1883	79°20′
10°50′	0,1891	0,1880	0,1914	79°10′
11°00′	**0,1920**	**0,1908**	**0,1944**	**79°00′**
11°10′	0,1949	0,1937	0,1974	78°50′
11°20′	0,1978	0,1965	0,2004	78°40′
11°30′	0,2007	0,1994	0,2035	78°30′
11°40′	0,2036	0,2022	0,2065	78°20′
11°50′	0,2065	0,2051	0,2095	78°10′
12°00′	**0,2094**	**0,2079**	**0,2126**	**78°00′**
12°10′	0,2123	0,2108	0,2156	77°50′
12°20′	0,2153	0,2136	0,2186	77°40′
12°30′	0,2182	0,2164	0,2217	77°30′
12°40′	0,2211	0,2193	0,2247	77°20′
12°50′	0,2240	0,2221	0,2278	77°10′
13°00′	**0,2269**	**0,2250**	**0,2309**	**77°00′**
13°10′	0,2298	0,2278	0,2339	76°50′
13°20′	0,2327	0,2306	0,2370	76°40′
13°30′	0,2356	0,2334	0,2401	76°30′
13°40′	0,2385	0,2363	0,2432	76°20′
13°50′	0,2414	0,2391	0,2462	76°10′
14°00′	**0,2443**	**0,2419**	**0,2493**	**76°00′**
14°10′	0,2473	0,2447	0,2524	75°50′
14°20′	0,2502	0,2476	0,2555	75°40′
14°30′	0,2531	0,2504	0,2586	75°30′
14°40′	0,2560	0,2532	0,2617	75°20′
14°50′	0,2589	0,2560	0,2648	75°10′
15°00′	**0,2618**	**0,2588**	**0,2679**	**75°00′**
15°10′	0,2647	0,2616	0,2711	74°50′
15°20′	0,2676	0,2644	0,2742	74°40′
15°30′	0,2705	0,2672	0,2773	74°30′
15°40′	0,2734	0,2700	0,2805	74°20′
15°50′	0,2763	0,2728	0,2836	74°10′
16°00′	**0,2793**	**0,2756**	**0,2867**	**74°00′**
16°10′	0,2822	0,2784	0,2899	73°50′
16°20′	0,2851	0,2812	0,2931	73°40′
16°30′	0,2880	0,2840	0,2962	73°30′
16°40′	0,2909	0,2868	0,2994	73°20′
16°50′	0,2938	0,2896	0,3026	73°10′
17°00′	**0,2967**	**0,2924**	**0,3057**	**73°00′**
17°10′	0,2996	0,2952	0,3089	72°50′
17°20′	0,3025	0,2979	0,3121	72°40′
17°30′	0,3054	0,3007	0,3153	72°30′
17°40′	0,3083	0,3035	0,3185	72°20′
17°50′	0,3113	0,3062	0,3217	72°10′

α [°]	α [rad]	sin α cos β	tg α ctg β	β [°]
18°00′	0,3142	0,3090	0,3249	72°00′
18°10′	0,3171	0,3118	0,3281	71°50′
18°20′	0,3200	0,3145	0,3314	71°40′
18°30′	0,3229	0,3173	0,3346	71°30′
18°40′	0,3258	0,3201	0,3378	71°20′
18°50′	0,3287	0,3228	0,3411	71°10′
19°00′	0,3316	0,3256	0,3443	71°00′
19°10′	0,3345	0,3283	0,3476	70°50′
19°20′	0,3374	0,3311	0,3508	70°40′
19°30′	0,3403	0,3388	0,3541	70°30′
19°40′	0,3432	0,3365	0,3574	70°20′
19°50′	0,3462	0,3393	0,3607	70°10′
20°00′	0,3491	0,3420	0,3640	70°00′
20°10′	0,3520	0,3448	0,3673	69°50′
20°20′	0,3549	0,3475	0,3706	69°40′
20°30′	0,3578	0,3502	0,3739	69°30′
20°40′	0,3607	0,3529	0,3772	69°20′
20°50′	0,3636	0,3557	0,3805	69°10′
21°00′	0,3665	0,3584	0,3839	69°00′
21°10′	0,3694	0,3611	0,3872	68°50′
21°20′	0,3723	0,3638	0,3906	68°40′
21°30′	0,3752	0,3665	0,3939	68°30′
21°40′	0,3782	0,3692	0,3973	68°20′
21°50′	0,3811	0,3719	0,4006	68°10′
22°00′	0,3840	0,3746	0,4040	68°00′
22°10′	0,3869	0,3773	0,4074	67°50′
22°20′	0,3898	0,3800	0,4108	67°40′
22°30′	0,3927	0,3827	0,4142	67°30′
22°40′	0,3956	0,3854	0,4176	67°20′
22°50′	0,3985	0,3881	0,4210	67°10′
23°00′	0,4014	0,3907	0,4245	67°00′
23°10′	0,4043	0,3934	0,4279	66°50′
23°20′	0,4072	0,3961	0,4314	66°40′
23°30′	0,4102	0,3987	0,4348	66°30′
23°40′	0,4131	0,4014	0,4383	66°20′
23°50′	0,4160	0,4041	0,4417	66°10′
24°00′	0,4189	0,4067	0,4452	66°00′
24°10′	0,4218	0,4094	0,4487	65°50′
24°20′	0,4247	0,4120	0,4522	65°40′
24°30′	0,4276	0,4147	0,4557	65°30′
24°40′	0,4305	0,4173	0,4592	65°20′
24°50′	0,4334	0,4200	0,4628	65°10′
25°00′	0,4363	0,4226	0,4663	65°00′
25°10′	0,4392	0,4253	0,4699	64°50′
25°20′	0,4422	0,4279	0,4734	64°40′
25°30′	0,4451	0,4305	0,4770	64°30′
25°40′	0,4480	0,4331	0,4806	64°20′
25°50′	0,4509	0,4358	0,4841	64°10′
26°00′	0,4538	0,4384	0,4877	64°00′
26°10′	0,4567	0,4410	0,4913	63°50′
26°20′	0,4596	0,4436	0,4950	63°40′
26°30′	0,4625	0,4462	0,4986	63°30′
26°40′	0,4654	0,4488	0,5022	63°20′
26°50′	0,4683	0,4514	0,5059	63°10′

α [°]	α [rad]	sin α cos β	tg α ctg β	β [°]
27°00′	0,4712	0,4540	0,5095	63°00′
27°10′	0,4741	0,4566	0,5132	62°50′
27°20′	0,4771	0,4592	0,5169	62°40′
27°30′	0,4800	0,4617	0,5206	62°30′
27°40′	0,4829	0,4643	0,5243	62°20′
27°50′	0,4858	0,4669	0,5280	62°10′
28°00′	0,4887	0,4695	0,5317	62°00′
28°10′	0,4916	0,4720	0,5354	61°50′
28°20′	0,4945	0,4746	0,5392	61°40′
28°30′	0,4974	0,4772	0,5430	61°30′
28°40′	0,5003	0,4797	0,5467	61°20′
28°50′	0,5032	0,4823	0,5505	61°10′
29°00′	0,5061	0,4848	0,5543	61°00′
29°10′	0,5091	0,4874	0,5581	60°50′
29°20′	0,5120	0,4899	0,5619	60°40′
29°30′	0,5149	0,4924	0,5658	60°30′
29°40′	0,5178	0,4950	0,5696	60°20′
29°50′	0,5207	0,4975	0,5735	60°10′
30°00′	0,5236	0,5000	0,5774	60°00′
30°10′	0,5265	0,5025	0,5812	59°50′
30°20′	0,5294	0,5050	0,5851	59°40′
30°30′	0,5323	0,5075	0,5890	59°30′
30°40′	0,5352	0,5100	0,5930	59°20′
30°50′	0,5381	0,5125	0,5969	59°10′
31°00′	0,5411	0,5150	0,6009	59°00′
31°10′	0,5440	0,5175	0,6048	58°50′
31°20′	0,5469	0,5200	0,6088	58°40′
31°30′	0,5498	0,5225	0,6128	58°30′
31°40′	0,5527	0,5250	0,6168	58°20′
31°50′	0,5556	0,5275	0,6208	58°10′
32°00′	0,5585	0,5299	0,6249	58°00′
32°10′	0,5614	0,5324	0,6289	57°50′
32°20′	0,5643	0,5348	0,6330	57°40′
32°30′	0,5672	0,5373	0,6371	57°30′
32°40′	0,5701	0,5398	0,6412	57°20′
32°50′	0,5730	0,5422	0,6453	57°10′
33°00′	0,5760	0,5446	0,6494	57°00′
33°10′	0,5789	0,5471	0,6536	56°50′
33°20′	0,5818	0,5495	0,6577	56°40′
33°30′	0,5847	0,5519	0,6619	56°30′
33°40′	0,5876	0,5544	0,6661	56°20′
33°50′	0,5905	0,5568	0,6703	56°10′
34°00′	0,5934	0,5592	0,6745	56°00′
34°10′	0,5963	0,5616	0,6787	55°50′
34°20′	0,5992	0,5640	0,6830	55°40′
34°30′	0,6021	0,5664	0,6873	55°30′
34°40′	0,6050	0,5688	0,6916	55°20′
34°50′	0,6080	0,5712	0,6959	55°10′
35°00′	0,6109	0,5736	0,7002	55°00′
35°10′	0,6138	0,5760	0,7046	54°50′
35°20′	0,6167	0,5783	0,7089	54°40′
35°30′	0,6196	0,5807	0,7133	54°30′
35°40′	0,6225	0,5831	0,7177	54°20′
35°50′	0,6254	0,5854	0,7221	54°10′

α [°]	α [rad]	sin α cos β	tg α ctg β	β [°]
36°00′	0,6283	0,5878	0,7265	54°00′
36°10′	0,6312	0,5901	0,7310	53°50′
36°20′	0,6341	0,5925	0,7355	53°40′
36°30′	0,6370	0,5948	0,7400	53°30′
36°40′	0,6400	0,5972	0,7445	53°20′
36°50′	0,6429	0,5995	0,7490	53°10′
37°00′	0,6458	0,6018	0,7536	53°00′
37°10′	0,6487	0,6041	0,7581	52°50′
37°20′	0,6516	0,6065	0,7627	52°40′
37°30′	0,6545	0,6088	0,7673	52°30′
37°40′	0,6574	0,6111	0,7720	52°20′
37°50′	0,6603	0,6134	0,7766	52°10′
38°00′	0,6632	0,6157	0,7813	52°00′
38°10′	0,6661	0,6180	0,7860	51°50′
38°20′	0,6690	0,6202	0,7907	51°40′
38°30′	0,6720	0,6225	0,7954	51°30′
38°40′	0,6749	0,6248	0,8002	51°20′
38°50′	0,6778	0,6271	0,8050	51°10′
39°00′	0,6807	0,6293	0,8098	51°00′
39°10′	0,6836	0,6316	0,8146	50°50′
39°20′	0,6865	0,6338	0,8195	50°40′
39°30′	0,6894	0,6361	0,8243	50°30′
39°40′	0,6923	0,6383	0,8292	50°20′
39°50′	0,6952	0,6406	0,8342	50°10′
40°00′	0,6981	0,6428	0,8391	50°00′
40°10′	0,7010	0,6450	0,8441	49°50′
40°20′	0,7039	0,6472	0,8491	49°40′
40°30′	0,7069	0,6494	0,8541	49°30′
40°40′	0,7098	0,6517	0,8591	49°20′
40°50′	0,7127	0,6539	0,8642	49°10′
41°00′	0,7156	0,6561	0,8693	49°00′
41°10′	0,7185	0,6583	0,8744	48°50′
41°20′	0,7214	0,6604	0,8796	48°40′
41°30′	0,7243	0,6626	0,8847	48°30′
41°40′	0,7272	0,6648	0,8899	48°20′
41°50′	0,7301	0,6670	0,8952	48°10′
42°00′	0,7330	0,6691	0,9004	48°00′
42°10′	0,7359	0,6713	0,9057	47°50′
42°20′	0,7389	0,6734	0,9110	47°40′
42°30′	0,7418	0,6756	0,9163	47°30′
42°40′	0,7447	0,6777	0,9217	47°20′
42°50′	0,7476	0,6799	0,9271	47°10′
43°00′	0,7505	0,6820	0,9325	47°00′
43°10′	0,7534	0,6841	0,9380	46°50′
43°20′	0,7563	0,6862	0,9435	46°40′
43°30′	0,7592	0,6884	0,9490	46°30′
43°40′	0,7621	0,6905	0,9545	46°20′
43°50′	0,7650	0,6926	0,9601	46°10′
44°00′	0,7679	0,6947	0,9657	46°00′
44°10′	0,7709	0,6967	0,9713	45°50′
44°20′	0,7738	0,6988	0,9770	45°40′
44°30′	0,7767	0,7009	0,9827	45°30′
44°40′	0,7796	0,7030	0,9884	45°20′
44°50′	0,7825	0,7050	0,9942	45°10′

α [°]	α [rad]	sin α cos β	tg α ctg β	β [°]
45°00′	0,7854	0,7071	1,0000	45°00′
45°10′	0,7883	0,7092	1,0058	44°50′
45°20′	0,7912	0,7112	1,0117	44°40′
45°30′	0,7941	0,7133	1,0176	44°30′
45°40′	0,7970	0,7153	1,0235	44°20′
45°50′	0,7999	0,7173	1,0295	44°10′
46°00′	0,8029	0,7193	1,0355	44°00′
46°10′	0,8058	0,7214	1,0416	43°50′
46°20′	0,8087	0,7234	1,0477	43°40′
46°30′	0,8116	0,7254	1,0538	43°30′
46°40′	0,8145	0,7274	1,0599	43°20′
46°50′	0,8174	0,7294	1,0661	43°10′
47°00′	0,8203	0,7314	1,0724	43°00′
47°10′	0,8232	0,7333	1,0786	42°50′
47°20′	0,8261	0,7353	1,0850	42°40′
47°30′	0,8290	0,7373	1,0913	42°30′
47°40′	0,8319	0,7392	1,0977	42°20′
47°50′	0,8348	0,7412	1,1041	42°10′
48°00′	0,8378	0,7431	1,1106	42°00′
48°10′	0,8407	0,7451	1,1171	41°50′
48°20′	0,8436	0,7470	1,1237	41°40′
48°30′	0,8465	0,7490	1,1303	41°30′
48°40′	0,8494	0,7509	1,1369	41°20′
48°50′	0,8523	0,7528	1,1436	41°10′
49°00′	0,8552	0,7547	1,1504	41°00′
49°10′	0,8581	0,7566	1,1571	40°50′
49°20′	0,8610	0,7585	1,1640	40°40′
49°30′	0,8639	0,7604	1,1708	40°30′
49°40′	0,8668	0,7623	1,1778	40°20′
49°50′	0,8698	0,7642	1,1847	40°10′
50°00′	0,8727	0,7660	1,1918	40°00′
50°10′	0,8756	0,7679	1,1988	39°50′
50°20′	0,8785	0,7698	1,2059	39°40′
50°30′	0,8814	0,7716	1,2131	39°30′
50°40′	0,8843	0,7735	1,2203	39°20′
50°50′	0,8872	0,7753	1,2276	39°10′
51°00′	0,8901	0,7771	1,2349	39°00′
51°10′	0,8930	0,7790	1,2423	38°50′
51°20′	0,8959	0,7808	1,2497	38°40′
51°30′	0,8988	0,7826	1,2572	38°30′
51°40′	0,9018	0,7844	1,2647	38°20′
51°50′	0,9047	0,7862	1,2723	38°10′
52°00′	0,9076	0,7880	1,2799	38°00′
52°10′	0,9105	0,7898	1,2876	37°50′
52°20′	0,9134	0,7916	1,2954	37°40′
52°30′	0,9163	0,7934	1,3032	37°30′
52°40′	0,9192	0,7951	1,3111	37°20′
52°50′	0,9221	0,7969	1,3190	37°10′
53°00′	0,9250	0,7986	1,3270	37°00′
53°10′	0,9279	0,8004	1,3351	36°50′
53°20′	0,9308	0,8021	1,3432	36°40′
53°30′	0,9338	0,8039	1,3514	36°30′
53°40′	0,9367	0,8056	1,3597	36°20′
53°50′	0,9396	0,8073	1,3680	36°10′

α [°]	α [rad]	sin α cos β	tg α ctg β	β [°]
54°00′	**0,9425**	**0,8090**	**1,3764**	**36°00′**
54°10′	0,9454	0,8107	1,3848	35°50′
54°20′	0,9483	0,8124	1,3934	35°40′
54°30′	0,9512	0,8141	1,4019	35°30′
54°40′	0,9541	0,8158	1,4106	35°20′
54°50′	0,9570	0,8175	1,4193	35°10′
55°00′	**0,9599**	**0,8192**	**1,4281**	**35°00′**
55°10′	0,9628	0,8208	1,4370	34°50′
55°20′	0,9657	0,8225	1,4460	34°40′
55°30′	0,9687	0,8241	1,4550	34°30′
55°40′	0,9716	0,8258	1,4641	34°20′
55°50′	0,9745	0,8274	1,4733	34°10′
56°00′	**0,9774**	**0,8290**	**1,4826**	**34°00′**
56°10′	0,9803	0,8307	1,4919	33°50′
56°20′	0,9832	0,8323	1,5013	33°40′
56°30′	0,9861	0,8339	1,5108	33°30′
56°40′	0,9890	0,8355	1,5204	33°20′
56°50′	0,9919	0,8371	1,5301	33°10′
57°00′	**0,9948**	**0,8387**	**1,5399**	**33°00′**
57°10′	0,9977	0,8403	1,5497	32°50′
57°20′	1,0007	0,8418	1,5597	32°40′
57°30′	1,0036	0,8434	1,5697	32°30′
57°40′	1,0065	0,8450	1,5798	32°20′
57°50′	1,0094	0,8465	1,5900	32°10′
58°00′	**1,0123**	**0,8480**	**1,6003**	**32°00′**
58°10′	1,0152	0,8496	1,6107	31°50′
58°20′	1,0181	0,8511	1,6212	31°40′
58°30′	1,0210	0,8526	1,6319	31°30′
58°40′	1,0239	0,8542	1,6426	31°20′
58°50′	1,0268	0,8557	1,6534	31°10′
59°00′	**1,0297**	**0,8572**	**1,6643**	**31°00′**
59°10′	1,0327	0,8587	1,6753	30°50′
59°20′	1,0356	0,8601	1,6864	30°40′
59°30′	1,0385	0,8616	1,6977	30°30′
59°40′	1,0414	0,8631	1,7090	30°20′
59°50′	1,0443	0,8646	1,7205	30°10′
60°00′	**1,0472**	**0,8660**	**1,7321**	**30°00′**
60°10′	1,0501	0,8675	1,7437	29°50′
60°20′	1,0530	0,8689	1,7556	29°40′
60°30′	1,0559	0,8704	1,7675	29°30′
60°40′	1,0588	0,8718	1,7796	29°20′
60°50′	1,0617	0,8732	1,7917	29°10′
61°00′	**1,0647**	**0,8746**	**1,8040**	**29°00′**
61°10′	1,0676	0,8760	1,8165	28°50′
61°20′	1,0705	0,8774	1,8291	28°40′
61°30′	1,0734	0,8788	1,8418	28°30′
61°40′	1,0763	0,8802	1,8546	28°20′
61°50′	1,0792	0,8816	1,8676	28°10′
62°00′	**1,0821**	**0,8829**	**1,8807**	**28°00′**
62°10′	1,0850	0,8843	1,8940	27°50′
62°20′	1,0879	0,8857	1,9074	27°40′
62°30′	1,0908	0,8870	1,9210	27°30′
62°40′	1,0937	0,8884	1,9347	27°20′
62°50′	1,0966	0,8897	1,9486	27°10′

α [°]	α [rad]	sin α cos β	tg α ctg β	β [°]
63°00′	**1,0996**	**0,8910**	**1,9626**	**27°00′**
63°10′	1,1025	0,8923	1,9768	26°50′
63°20′	1,1054	0,8936	1,9912	26°40′
63°30′	1,1083	0,8949	2,0057	26°30′
63°40′	1,1112	0,8962	2,0204	26°20′
63°50′	1,1141	0,8975	2,0353	26°10′
64°00′	**1,1170**	**0,8988**	**2,0503**	**26°00′**
64°10′	1,1199	0,9001	2,0655	25°50′
64°20′	1,1228	0,9013	2,0809	25°40′
64°30′	1,1257	0,9026	2,0965	25°30′
64°40′	1,1286	0,9038	2,1123	25°20′
64°50′	1,1316	0,9051	2,1283	25°10′
65°00′	**1,1345**	**0,9063**	**2,1445**	**25°00′**
65°10′	1,1374	0,9075	2,1609	24°50′
65°20′	1,1403	0,9088	2,1775	24°40′
65°30′	1,1432	0,9100	2,1943	24°30′
65°40′	1,1461	0,9112	2,2113	24°20′
65°50′	1,1490	0,9124	2,2286	24°10′
66°00′	**1,1519**	**0,9135**	**2,2460**	**24°00′**
66°10′	1,1548	0,9147	2,2637	23°50′
66°20′	1,1577	0,9159	2,2817	23°40′
66°30′	1,1606	0,9171	2,2998	23°30′
66°40′	1,1636	0,9182	2,3183	23°20′
66°50′	1,1665	0,9194	2,3369	23°10′
67°00′	**1,1694**	**0,9205**	**2,3559**	**23°00′**
67°10′	1,1723	0,9216	2,3750	22°50′
67°20′	1,1752	0,9228	2,3945	22°40′
67°30′	1,1781	0,9239	2,4142	22°30′
67°40′	1,1810	0,9250	2,4342	22°20′
67°50′	1,1839	0,9261	2,4545	22°10′
68°00′	**1,1868**	**0,9272**	**2,4751**	**22°00′**
68°10′	1,1897	0,9283	2,4960	21°50′
68°20′	1,1926	0,9293	2,5172	21°40′
68°30′	1,1956	0,9304	2,5386	21°30′
68°40′	1,1985	0,9315	2,5605	21°20′
68°50′	1,2014	0,9325	2,5826	21°10′
69°00′	**1,2043**	**0,9336**	**2,6051**	**21°00′**
69°10′	1,2072	0,9346	2,6279	20°50′
69°20′	1,2101	0,9356	2,6511	20°40′
69°30′	1,2130	0,9367	2,6746	20°30′
69°40′	1,2159	0,9377	2,6985	20°20′
69°50′	1,2188	0,9387	2,7228	20°10′
70°00′	**1,2217**	**0,9397**	**2,7475**	**20°00′**
70°10′	1,2246	0,9407	2,7725	19°50′
70°20′	1,2275	0,9417	2,7980	19°40′
70°30′	1,2305	0,9426	2,8239	19°30′
70°40′	1,2334	0,9436	2,8502	19°20′
70°50′	1,2363	0,9446	2,8770	19°10′
71°00′	**1,2392**	**0,9455**	**2,9042**	**19°00′**
71°10′	1,2421	0,9465	2,9319	18°50′
71°20′	1,2450	0,9474	2,9600	18°40′
71°30′	1,2479	0,9483	2,9887	18°30′
71°40′	1,2508	0,9492	3,0178	18°20′
71°50′	1,2537	0,9502	3,0475	18°10′

α [°]	α [rad]	sin α cos β	tg α ctg β	β [°]
72°00′	**1,2566**	**0,9511**	**3,0777**	**18°00′**
72°10′	1,2595	0,9520	3,1084	17°50′
72°20′	1,2625	0,9528	3,1397	17°40′
72°30′	1,2654	0,9537	3,1716	17°30′
72°40′	1,2683	0,9546	3,2041	17°20′
72°50′	1,2712	0,9555	3,2371	17°10′
73°00′	**1,2741**	**0,9563**	**3,2709**	**17°00′**
73°10′	1,2770	0,9572	3,3052	16°50′
73°20′	1,2799	0,9580	3,3402	16°40′
73°30′	1,2828	0,9588	3,3759	16°30′
73°40′	1,2857	0,9596	3,4124	16°20′
73°50′	1,2886	0,9605	3,4495	16°10′
74°00′	**1,2915**	**0,9613**	**3,4874**	**16°00′**
74°10′	1,2945	0,9621	3,5261	15°50′
74°20′	1,2974	0,9628	3,5656	15°40′
74°30′	1,3003	0,9636	3,6059	15°30′
74°40′	1,3032	0,9644	3,6470	15°20′
74°50′	1,3061	0,9652	3,6891	15°10′
75°00′	**1,3090**	**0,9659**	**3,7321**	**15°00′**
75°10′	1,3119	0,9667	3,7760	14°50′
75°20′	1,3148	0,9674	3,8208	14°40′
75°30′	1,3177	0,9681	3,8667	14°30′
75°40′	1,3206	0,9689	3,9136	14°20′
75°50′	1,3235	0,9696	3,9617	14°10′
76°00′	**1,3265**	**0,9703**	**4,0108**	**14°00′**
76°10′	1,3294	0,9710	4,0611	13°50′
76°20′	1,3323	0,9717	4,1126	13°40′
76°30′	1,3352	0,9724	4,1653	13°30′
76°40′	1,3381	0,9730	4,2193	13°20′
76°50′	1,3410	0,9737	4,2747	13°10′
77°00′	**1,3439**	**0,9744**	**4,3315**	**13°00′**
77°10′	1,3468	0,9750	4,3897	12°50′
77°20′	1,3497	0,9757	4,4494	12°40′
77°30′	1,3526	0,9763	4,5107	12°30′
77°40′	1,3555	0,9769	4,5736	12°20′
77°50′	1,3584	0,9775	4,6382	12°10′
78°00′	**1,3614**	**0,9781**	**4,7046**	**12°00′**
78°10′	1,3643	0,9787	4,7729	11°50′
78°20′	1,3672	0,9793	4,8430	11°40′
78°30′	1,3701	0,9799	4,9152	11°30′
78°40′	1,3730	0,9805	4,9894	11°20′
78°50′	1,3759	0,9811	5,0658	11°20′
79°00′	**1,3788**	**0,9816**	**5,1446**	**11°00′**
79°10′	1,3817	0,9822	5,2257	10°50′
79°20′	1,3846	0,9827	5,3093	10°40′
79°30′	1,3875	0,9833	5,3955	10°30′
79°30′	1,3904	0,9838	5,4845	10°20′
79°50′	1,3934	0,9843	5,5764	10°10′
80°00′	**1,3963**	**0,9848**	**5,6713**	**10°00′**
80°10′	1,3992	0,9853	5,7694	9°50′
80°20′	1,4021	0,9858	5,8708	9°40′
80°30′	1,4050	0,9863	5,9758	9°30′
80°40′	1,4079	0,9868	6,0844	9°20′
80°50′	1,4108	0,9872	6,1970	9°10′

α [°]	α [rad]	sin α cos β	tg α ctg β	β [°]
81°00′	**1,4137**	**0,9877**	**6,3138**	**9°00′**
81°10′	1,4166	0,9881	6,4348	8°50′
81°20′	1,4195	0,9886	6,5606	8°40′
81°30′	1,4224	0,9890	6,6912	8°30′
81°40′	1,4254	0,9894	6,8269	8°20′
81°50′	1,4283	0,9899	6,9682	8°10′
82°00′	**1,4312**	**0,9903**	**7,1154**	**8°00′**
82°10′	1,4341	0,9907	7,2687	7°50′
82°20′	1,4370	0,9911	7,4287	7°40′
82°30′	1,4399	0,9914	7,5958	7°30′
82°40′	1,4428	0,9918	7,7704	7°20′
82°50′	1,4457	0,9922	7,9530	7°10′
83°00′	**1,4486**	**0,9925**	**8,1443**	**7°00′**
83°10′	1,4515	0,9929	8,3450	6°50′
83°20′	1,4544	0,9932	8,5555	6°40′
83°30′	1,4573	0,9936	8,7769	6°30′
83°40′	1,4603	0,9939	9,0098	6°20′
83°50′	1,4632	0,9942	9,2553	6°10′
84°00′	**1,4661**	**0,9945**	**9,5144**	**6°00′**
84°10′	1,4690	0,9948	9,7882	5°50′
84°20′	1,4719	0,9951	10,078	5°40′
84°30′	1,4748	0,9954	10,385	5°30′
84°40′	1,4777	0,9957	10,712	5°20′
84°50′	1,4806	0,9959	11,059	5°10′
85°00′	**1,4835**	**0,9962**	**11,430**	**5°00′**
85°10′	1,4864	0,9964	11,826	4°50′
85°20′	1,4893	0,9967	12,251	4°40′
85°30′	1,4923	0,9969	12,706	4°30′
85°40′	1,4952	0,9971	13,197	4°20′
85°50′	1,4981	0,9974	13,727	4°10′
86°00′	**1,5010**	**0,9976**	**14,301**	**4°00′**
86°10′	1,5039	0,9978	14,924	3°50′
86°20′	1,5068	0,9980	15,605	3°40′
86°30′	1,5097	0,9981	16,350	3°30′
86°40′	1,5126	0,9983	17,169	3°20′
86°50′	1,5155	0,9985	18,075	3°10′
87°00′	**1,5184**	**0,9986**	**19,081**	**3°00′**
87°10′	1,5213	0,9988	20,206	2°50′
87°20′	1,5243	0,9989	21,470	2°40′
87°30′	1,5272	0,9990	22,904	2°30′
87°40′	1,5301	0,9992	24,542	2°20′
87°50′	1,5330	0,9993	26,432	2°10′
88°00′	**1,5359**	**0,9994**	**28,636**	**2°00′**
88°10′	1,5388	0,9995	31,242	1°50′
88°20′	1,5417	0,9996	34,368	1°40′
88°30′	1,5446	0,9997	38,189	1°30′
88°40′	1,5475	0,9997	42,964	1°20′
88°50′	1,5504	0,9998	49,104	1°10′
89°00′	**1,5533**	**0,9998**	**57,290**	**1°00′**
89°10′	1,5563	0,9999	68,750	0°50′
89°20′	1,5592	0,9999	85,940	0°40′
89°30′	1,5621	1,0000	114,59	0°30′
89°40′	1,5650	1,0000	171,89	0°20′
89°50′	1,5679	1,0000	343,77	0°10′
90°00′	**1,5708**	**1,0000**	**—**	**0°00′**

Norėdami apskaičiuoti sinuso ir tangento reikšmes, taikykite α reikšmes, esančias kairėje. Norėdami apskaičiuoti kosinuso ir kotangento reikšmes, taikykite β reikšmes, esančias dešinėje.

PROGRESIJOS, SEKOS, SKAIČIŲ EILUTĖS

Progresijos

Progresijos pavadinimas	Formulė dviem skaičiams	Bendra formulė, kai turim n skaičių	Pavyzdys: skaičių 1, 2 ir 4 progresija
Aritmetinė	$m_2=\frac{a+b}{2}$	$m_n=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$	$m=\frac{1+2+4}{3}=\frac{7}{3}\approx 2,333$
Geometrinė[a]	$g_2=\sqrt{a\cdot b}$	$g_n=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_n}$	$g=\sqrt[3]{1\cdot 2\cdot 4}=\sqrt[3]{8}=2$
Kvadratinė[b]	$d_2=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$	$d_n=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}}$	$d=\sqrt{\frac{1^2+2^2+4^2}{3}}=\sqrt{7}\approx 2,646$
Harmoninė[c]	$h_2=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$	$h_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}$	$h=\frac{3}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\frac{12}{7}\approx 1,714$

[a] tariame, kad po šaknimi esantis skaičius teigiamas; [b] skaičiai, kurių vidurkis skaičiuojamas, turi būti neneigiami; [c] nei vienas skaičių, kurių vidurkis skaičiuojamas, negali būti lygus nuliui.

Skirtingos progresijų rūšys (turint tą patį skaičių rinkinį) visada atitinka sąlygą $h\le g\le m\le d$.

Geometrinė ir aritmetinė seka

Problema	Aritmetinė seka	Geometrinė seka
Apibrėžimas	Seką $\{a_n\}$ vadiname aritmetine, jei gretimų sekos narių skirtumas r yra pastovus: $a_{n+1}=a_n+r$	Seką $\{a_n\}$ vadiname geometrine, jei $a_1\ne 0$ ir bet kurio $(n>1)$ sekos elemento ir po jo einančio elemento dalmuo q yra pastovus: $a_{n+1}=a_n\, q$
Sekos n–asis narys	$a_n=a_1+(n-1)\,r\ \ (n\ge 1)$ $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\ \ (n>1)$ a_n, kai $n>1$, tai tų elementų, tarp kurių jis yra, aritmetinis vidurkis	$a_n=a_1\cdot q^{n-1}\ \ (n\ge 1)$ $a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}\ \ (n>1)$ a_n, kai $n>1$, tai geometrinis vidurkis tų elementų, tarp kurių jis yra
Sekos riba $a_n\ (n\to\infty)$	$\begin{cases}+\infty & (\text{kai } r>0)\\ a_1 & (\text{kai } r=0)\\ -\infty & (\text{kai } r<0)\end{cases}$	$\begin{cases}+\infty & (\text{kai } q>1 \text{ bei } a_1>0)\\ -\infty & (\text{kai } q>1 \text{ bei } a_1<0)\\ a_1 & (\text{kai } q=1)\\ 0 & (\text{kai } \lvert q\rvert<1)\\ \text{nėra} & (\text{kai } q\le -1)\end{cases}$
Sekos n pirmųjų narių suma $S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+...+a_n$	$S_n=n\frac{a_1+a_n}{2}=$ $=na_1+\frac{r}{2}n(n-1)$	$S_n=\begin{cases}a_1\frac{1-q^n}{1-q} & (\text{kai } q\ne 1)\\ na_1 & (\text{kai } q=1)\end{cases}$
Sekų pavyzdžiai	3, 5, 7, 9, 11, ... $(a_1=3,\ r=2)$ 2, –1, –4, –7, –10, ... $(a_1=2,\ r=-3)$	1, 2, 4, 8, 16, ... $(a_1=1,\ q=2)$ 2, –6, 18, –54, 162, ... $(a_1=2;\ q=-3)$

SKAIČIŲ EILUČIŲ SUMOS

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}\qquad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\qquad \sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2\qquad \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}\ \text{(nelyginių skaičių kvadratų suma)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

KAI KURIŲ FUNKCIJŲ SKLEIDIMAS LAIPSNINĖMIS EILUTĖMIS

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...\qquad x\in R$$

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+...\qquad x\in R$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...\qquad x \text{ matuojamas radianais; } x\in R$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...\qquad x \text{ matuojamas radianais; } x\in R$$

$$\text{tg}\, x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+...\qquad x \text{ matuojamas radianais; } |x|<\frac{\pi}{2}$$

$$\text{arc tg}\, x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...\qquad x\in(-1,1)$$

$$\text{arc sin}\, x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+...\qquad x\in(-1,1)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...\qquad x\in(-1,1]$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...\right)\qquad x\in(-1,1)$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+...\qquad x\in(-1,1)$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2^2\cdot 2!}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4\cdot 4!}x^4+...\qquad x\in[-1,1]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-...\qquad x\in[-1,1]$$

SEKŲ RIBOS

Sekos ribos apibrėžimas

Skaičių g vadiname skaičių sekos $\{a_n\}$ riba, jei kiekvienai skaičiaus g aplinkai priklauso visi sekos elementai, išskyrus baigtinį elementų skaičių.

Kitaip tariant:

skaičius g yra sekos $\{a_n\}$ riba, jei kiekvieną skaičių $\varepsilon > 0$ atitinka toks natūralusis skaičius M, kad su kiekvienu $n > M$ teisinga nelygybė $|a_n - g| < \varepsilon$.

Jei seka $\{a_n\}$ turi ribą g, tai rašome taip: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

Pastaba: seka gali turėti tik vieną ribą.

Elementariosios sekų rūšys

Pavadinimas	Sąlyga	Pavyzdys
Pastovi	Su kiekvienu $n \geq 1$ a_n = const	1, 1, 1, 1, 1, …
Didėjanti	Su kiekvienu $n \geq 1$ $a_{n+1} > a_n$	1, 2, 3, 4, 5, …
Mažėjanti	Su kiekvienu $n \geq 1$ $a_{n+1} < a_n$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
Nemažėjanti	Su kiekvienu $n \geq 1$ $a_{n+1} \geq a_n$	1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, …
Nedidėjanti	Su kiekvienu $n \geq 1$ $a_{n+1} \leq a_n$	1, 0, 0, 0, 0, …
Monotoninė	Seka nemažėjanti arba nedidėjanti	$1, 1, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \ldots$
Kintanti	Su kiekvienu $n \geq 1$ $a_n \cdot a_{n+1} < 0$	1, –2, 4, –8, 16, –32, …
Aprėžta iš apačios	Egzistuoja toks skaičius A, kad su kiekvienu $n > 0$ teisinga nelygybė $a_n \geq A$ (t. y. egzistuoja nemažesnis skaičius už bet kurį sekos elementą)	1, 2, 4, 8, 16, 32, …
Aprėžta iš viršaus	Egzistuoja toks skaičius A, kad su kiekvienu $n > 0$ teisinga nelygybė $a_n \leq A$	1, 0, –1, –2, –3, …
Aprėžtoji	Seka aprėžta iš viršaus ir iš apačios	1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, …
Artėjanti į skaičių g	Egzistuoja toks skaičius g, kad g yra sekos riba (žiūrėti sekos ribos apibrėžimą)	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ (seka artėja į $g = 0$)
Artėjanti į $+\infty$, t. y. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$	Jei bet kurį skaičių A atitinka toks natūralusis skaičius M, kad su kiekvienu $n > M$ teisinga nelygybė $a_n > A$ (t. y. beveik visi[a] sekos elementai didesni už duotąjį skaičių)	1, 2, 3, 4, 5, 6, …
Artėjanti į $-\infty$ t. y. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$	Jei bet kurį skaičių A atitinka toks natūralusis skaičius M, kad su kiekvienu $n > M$ teisinga nelygybė $a_n < A$ (t. y. beveik visi[a] sekos elementai mažesni už duotąjį skaičių)	0, –2, –4, –6, …

[a] „beveik visi" reiškia „visi, išskyrus baigtinį elementų skaičių"

Sekų ribų skaičiavimo taisyklės

Jei egzistuoja sekų $\{a_n\}$ ir $\{b_n\}$ ribos: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ir $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, tai tenkinamos tokios ribos:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b} \quad (\text{kiekvienam } b_n \neq 0)$$

Jei seka $\{a_n\}$ artėja į nulį, o seka $\{b_n\}$ aprėžta, tai $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$.

Sekos, artėjančios į nulį, ir sekos, tolstančios į begalybę

Jei su kiekvienu n $a_n > 0$ ir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, tai $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.

Jei su kiekvienu n $a_n < 0$ ir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, tai $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$.

Jei $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, tai $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$.

Trijų sekų teorema

Jeigu teisinga lygybė $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$, o trečios sekos elementai (pradedant n–uoju elementu) tenkina sąlygą $a_n \leq b_n \leq c_n$, tai sekos b_n riba $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Monotoninių sekų ribos

Monotoninės ir aprėžtos sekos riba yra baigtinė.

Keletas ribų

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} = 2{,}718\ \ldots \ (\text{natūraliojo logaritmo pagrindas})$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1 \quad (a > 0) \qquad \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (a > 0)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^n}{n} = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^n}{n^k} = +\infty \quad (k \in N)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a \in R) \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n!} = 0 \quad (k \in N)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\ln n}{\ln n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = 1$$

Keletas funkcijų ribų (žr. kitą puslapį):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1 + x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0)$$

FUNKCIJŲ RIBOS

Funkcijų ribų apibrėžimai

Ribos rūšis	Apibrėžimas
Funkcijos riba taške	Skaičius g yra funkcijos f riba taške x_0, jei kiekvienos sekos $\{x_n\}$ elementai x_n priklauso funkcijos apibrėžimo sričiai ir iš sąlygos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ išplaukia $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$. Sekos $\{x_n\}$ nariai yra tokie, kad su kiekvienu $n \in N$ tenkinama $x_n \neq x_0$
Riba iš kairės (iš dešinės)	Skaičius g yra funkcijos f riba iš kairės (iš dešinės) taške x_0, jei kiekvienos sekos $\{x_n\}$ elementai x_n priklauso funkcijos apibrėžimo sričiai ir iš sąlygos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ išplaukia $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$. Sekos $\{x_n\}$ nariai yra tokie, kad su bet kuriuo $n \in N$ tenkinama $x_n < x_0$ $[x_n > x_0]$
Neapibrėžto didumo riba	Kai galioja prielaidos iš ankstesnių apibrėžimų, tai gauname, kad $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$ ir $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$

Pastaba: lygybė $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ teisinga ir analogiškos lygybės skirtumui, ir dalmeniui, ir sandaugai. Palyginkite su sekų formulėmis ankstesniame puslapyje.

Lopitalio (l'Hospital) taisyklė

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Sąlygos: $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžtos intervale, kuriam priklauso taškas x_0 (pačiame taške gali būti ir neapibrėžtos), funkcijų išvestinės (žr. kitą puslapį) $f'(x)$ ir $g'(x)$ tame intervale baigtinės, $g'(x_0) \neq 0$, neapibrėžtumas gaunamas toks $\frac{0}{0}$ arba $\frac{\infty}{\infty}$. Išraiška dešinėje formulės pusėje egzistuoja arba yra lygi $\pm\infty$.

Neapibrėžtumai apskaičiuojant ribas

Neapibrėžtumų rūšys	Neapibrėžtumo šalinimo būdai
$\frac{0}{0}$ arba $\frac{\infty}{\infty}$	Algebriniai pertvarkiai (pvz., suprastinti pradinę trupmeną) Išdiferencijuoti vardiklį ir skaitiklį, taikant Lopitalio taisyklę (kartą diferencijuoti, jei reikia – kelis kartus)
$0 \cdot \infty$	Kadangi $a \cdot b = \dfrac{a}{\left(\dfrac{1}{b}\right)}$, tai galime duotąją reikšmę pakeisti trupmena ir elgtis taip kaip su neapibrėžtumais $\frac{0}{0}$ arba $\frac{\infty}{\infty}$
0^0, ∞^0, 1^∞	Reiškinį išlogaritmuoti (potencijuoti) (gausime išraišką tokiu pavidalu $0 \cdot \infty$) ir transformuoti aukščiau aprašytu būdu į reiškinį $\frac{0}{0}$ arba $\frac{\infty}{\infty}$. Rasti ribą (tarkim, kad ji lygi A), gautą rezultatą antilogaritmuoti (galutinis rezultatas $= e^A$)
$\infty - \infty$	Kadangi $a - b = \left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right) : \dfrac{1}{ab}$, gauname neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$ (sprendimo būdas aukščiau)

Pavyzdys: $\lim\limits_{n\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{n\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$ (kai turime neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$, taikome Lopitalio taisyklę).

IŠVESTINĖ IR INTEGRALAS

Pagrindiniai apibrėžimai ir žymėjimai

Apibrėžiamas dydis	Apibrėžimas	Sąlygos, pastabos
Skirtuminis dalmuo	Išraiška $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	x_0 ir $x_0 + h$ priklauso funkcijos f apibrėžimo sričiai, pokytis $h \neq 0$
$f'(x_0)$, funkcijos išvestinė taške x_0	$f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	Sąlygos tokios kaip ir skirtuminiam dalmeniui, be to, duota riba egzistuoja (nepriklausomai nuo to, kaip h artėja prie nulio) ir yra baigtinė
f', funkcijos f išvestinė	$f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$; funkcija priskiria argumentams $x \in X$ funkcijos išvestinę duotame taške	X — tų argumentų aibė, kurioje egzistuoja funkcijos f išvestinė
F, funkcijos f pirmykštė funkcija	F yra funkcijos f pirmykštė funkcija, jei duotame $x \in X$ $F'(x) = f(x)$	Teisinga visiems duoto intervalo X taškams
$\int f(x)dx$, funkcijos f neapibrėžtinis integralas	Neapibrėžtinis integralas, tai visų duotos funkcijos f pirmykščių funkcijų aibė	Skirtingos pirmykštės funkcijos skiriasi tik konstanta, $F(x) + C$
$\int_a^b f(x)dx$ funkcijos f apibrėžtinis integralas intervale nuo a iki b	Vienas apibrėžimų gali būti: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$	Integralas apibrėžiamas tik uždarajame intervale $[a, b]$

Svarbiausi integravimo būdai

Būdas	Paaiškinimas	Pastabos
Taikant elementariuosius pertvarkius	Integralo sumos skaidymas integralų sumomis (algebriniai pertvarkiai, trigonometrinės formulės ir t. t.)	Nėra bendros formulės, kaip suintegruoti bet kurį funkcijos dalmenį arba sandaugą
Integravimas dalimis	$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$	Integruojamus dauginamuosius parenkam taip, kad $f(x)$ supaprastėtų suintegravus (pavyzdžiui, daugianaris), o $g'(x)$ neliktų labiau sudėtinga nei prieš integravimą (pavyzdžiui, $\sin x$, e^x)
Integravimas taikant keitinius	$\int f(x)\, dx = \int f[g(t)]\, g'(t)\, dt$	Pakeičiam $g(t) = x$; nėra bendrų taisyklių kaip parinkti tinkamiausią $g(t)$; jei turim apibrėžtinį integralą, reikia atitinkamai keisti integravimo ribas, apskaičiuojant kokį t atitinka duotasis $x = a$, $x = b$
Lentelių taikymas	Yra detalių integralų lentelių, kuriose rasime dažniausiai sutinkamas suintegruotas funkcijas	Manoma, kad vartotojas žino paprasčiausias integravimo taisykles
Grafiniai ir skaitiniai būdai	Pavyzdžiui, grafinis ploto įvertinimas po kreive (palyginti p. 43 medžiagą), apytikslis išreiškimas sumomis	Tokie būdai tinka apskaičiuoti apytiksles apibrėžtinių integralų reikšmes

FUNKCIJŲ IŠVESTINĖS IR INTEGRALAI

← Diferencijavimas	$f(x)$	Integravimas →
Funkcijos išvestinė	**Funkcija**[a]	**Pirmykštė funkcija**
	Bendros formulės	
$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$a\,f'(x)$	Skaičiaus ir funkcijos sandauga, $a\,f(x)$	$a\int f(x)\,dx$
$f'(x)+g'(x)$	Funkcijų suma (arba skirtumas), $f(x)+g(x)$	$\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$
$a\,f'(ax+b)$	$f(ax+b)$	$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)$
$f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)$	Funkcijų sandauga, $f(x)\,g(x)$	
$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$	Funkcijų dalmuo, $\frac{f(x)}{g(x)}$	
$\frac{1}{f'(x)}$	Atvirkštinė funkcija, $f^{-1}(x)$	Nėra paprastos bendros formulės
$\frac{f'(x)}{f(x)}$ ([b])	Funkcijos logaritmas, $\ln\lvert f(x)\rvert$	
$f'(g(x))\cdot g'(x)$	Sudėtinė funkcija, $f(g(x))$	
	Keleto funkcijų išvestinės ir integralai	
0	a	$ax+C$
1	x	$\frac{1}{2}x^2+C$
$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$
nx^{n-1}	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C\ (n\neq-1)$
e^x	e^x	e^x+C
$a^x\ln a$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$x\ln x-x+C$
$\frac{1}{x\ln a}$	$\log_a x$	$\frac{x}{\ln a}(\ln x-1)+C$
$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x+C$
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x+C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$-\ln(\cos x)+C$
$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{ctg} x$	$\ln(\sin x)+C$

← Diferencijavimas	$f(x)$	Integravimas →
Funkcijos išvestinė	**Funkcija**[a]	**Pirmykštė funkcija**
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arc\,tg} x$	$x\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$
$\frac{-1}{1+x^2}$	$\operatorname{arc\,ctg} x$	$x\operatorname{arc\,ctg} x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

[a] praleista prielaida, svarbi funkcijos apibrėžtumui (vardikliai nelygūs nuliui ir t. t.);
[b] taip vadinama logaritminė išvestinė, praverčianti diferencijuojant funkcijas, kurių išraiška yra tokia: $f(x)^{g(x)}$

Išvestinių taikymai fizikoje ir geometrijoje. Pavyzdžiai

Problema	Formulė	Brėžinys	Sąlygos
Funkcijos $f(x)$ liestinė taške $x=x_0$	Liestinės lygtis: $y=k(x-x_0)+f(x_0)$; Čia: $k=\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$		Funkcija ir jos išvestinė turi būti apibrėžta, kai $x=x_0$
Kampas α tarp kreivių $f(x)$ ir $g(x)$, kurios kertasi taške $x=x_0$	$\operatorname{tg}\alpha=\frac{f'(x_0)-g'(x_0)}{1+f'(x_0)g'(x_0)}$		Abi funkcijos ir jų išvestinės turi būti apibrėžtos, kai $x=x_0$
Momentinis kūno greitis	$v(t)=\frac{dx(t)}{dt}$		$x(t)$ – kūno padėtis momentu t
Kūno pagreitis momentu t	$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}$	—	Antrosios išvestinės taikymo pavyzdys

Integralų taikymas geometrijoje

Problema	Paaiškinimas	Formulė	Brėžinys	Sąlygos[a]
Plotas po kreive	Plotas tarp kreivės ir ašies Ox[b]	$S=\int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$		Funkcija $f(x)$ turi būti aprėžta intervale $[a, b]$
Kreivės lanko ilgis	Kreivės $f(x)$ lankas tarp taškų $x=a$ ir $x=b$	$l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$		$f(x)$ ir jos išvestinė $f'(x)$ negali turėti trūkio taškų intervale $[a, b]$
Sūkinių šoninio paviršiaus plotas	Paviršių gavome, apsukę kreivę $f(x)$ apie ašį Ox	$S_b=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$		
Sūkinių tūris		$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$		Funkcija $f(x)$ negali turėti trūkio taškų intervale $[a, b]$

[a] sąlygos priklauso nuo to, kaip apibrėžiame apibrėžtinį integralą; [b] jei formulėje nėra modulio ženklo, tai plotas, kai $f(x)>0$, skaičiuojamas kaip teigiamas; kai $f(x)<0$ — skaičiuojamas kaip neigiamas

PAPRASČIAUSI GEOMETRIJOS APIBRĖŽIMAI

Pirminės geometrijos sąvokos

Taškas, tiesė, plokštuma, erdvė.

Elementariosios taškų ir tiesių savybės

1. Per du skirtingus taškus (A ir B) galime nubrėžti tik vieną tiesę, einančią per šiuos du taškus (tiesė AB).
2. Jei plokštumos taškas nepriklauso tiesei, tai per jį galime nubrėžti tik vieną tiesę, nekertančią kitos toje plokštumoje esančios tiesės. Tai tiesė, kuri yra lygiagreti šiai tiesei.
3. Tiesė — tai vienai plokštumai priklausančių taškų, lygiai nutolusių nuo duotų taškų A ir B, geometrinė vieta.
4. Plokštuma — tai vienos erdvės taškų, lygiai nutolusių nuo duotų taškų A ir B, geometrinė vieta.

Tiesių šeimos

Tiesių pluoštas — grupė visų tiesių, kertančių joms bendrą tašką A.

Lygiagrečių tiesių pluoštas — grupė visų tiesių, lygiagrečių duotai tiesei a.

Atstumo tarp taškų savybės

1. $|AB| \geq 0$; $|AB| = 0 \Leftrightarrow A = B$.
2. $|AB| = |BA|$.
3. Kai A, B, C — trys taškai, tai $|AB| + |BC| \leq |AC|$ (trikampio nelygybė).

Keletas priklausomybių

Problema	Galima situacija	Pastabos
Trys skirtingi taškai A, B ir C	Priklauso vienai tiesei	Sąlyga: arba $|AB| = |AC| + |CB|$, arba $|AB| = |AC| - |CB|$
	Nepriklauso vienai tiesei (kiekviena pora taškų apibrėžia atskirą tiesę)	A, B ir C sudaro trikampį
Dviejų tiesių susikirtimo taškas	Nėra	Lygiagrečiosios tiesės[a]
	Vienas	Susikertančiosios tiesės
	Be galo daug[b]	Sutampančiosios tiesės
Apskritimo ir tiesės susikirtimo plokštumoje taškai	Nėra	Tiesė išorinė apskritimo atžvilgiu
	Vienas taškas	Apskritimo liestinė
	Du taškai	Apskritimo kirstinė
Tiesės ir plokštumos susikirtimo taškai	Nėra	Tiesė, lygiagreti plokštumai
	Vienas	Tiesė, kertanti plokštumą
	Be galo daug (visa tiesė)	Tiesė, esanti plokštumoje

[a] erdvėje tiesės, neturinčios bendrų taškų arba lygiagrečios (esančios vienoje plokštumoje), arba prasilenkiančios (kitu atveju); [b] visi abiejų tiesių taškai

Figūrų ir joms priklausančių taškų rūšys

Problema	Apibrėžimas	Pastabos, pavyzdžiai
Aprėžtoji figūra	Figūra, kuri yra skritulyje[a]	Atkarpa
Neaprėžtoji figūra	Figūra, kurios negalima patalpinti jokiame skritulyje[a]	Tiesė
Vidinis figūros taškas	Taškas, kurio aplinka[b] priklauso duotai figūrai	Vidinis taškas visada priklauso figūrai
Išorinis figūros taškas	Taškas, kurio aplinka[b] nepriklauso figūrai	Išorinis taškas nepriklauso figūrai
Figūros krašto taškas	Taškas, kurio kiekvieną aplinką[b] sudaro taškai, priklausantys figūrai ir nepriklausantys jai	Krašto taškas gali priklausyti figūrai arba ne
Figūros vidus [išorė/kraštas]	Visų vidinių [išorinių/krašto] taškų aibė	Skritulio vidus — tai skritulys be apskritimo
Uždaroji figūra	Figūra, kuriai priklauso kiekvienas krašto taškas	Skritulys, apskritimas
Atviroji figūra	Figūra, kuriai nepriklauso nė vienas krašto taškas	Skritulys be krašto
Iškilioji figūra	Figūra, kurios bet kuriuos du taškus galime sujungti viena atkarpa, priklausančia duotai figūrai	Bendra iškiliųjų figūrų dalis — tai iškilioji figūra
Jungioji figūra (paviršius)	Figūra, kurios bet kuriuos du taškus galime sujungti paprastąja laužte, priklausančia duotai figūrai	Pavyzdžiui: skritulys, atkarpa, plokštuma[c]
Figūra, kertanti plokštumą	Figūra, kuri yra bendras dviejų susikertančių paviršių kraštas, kai paviršių sąjunga sutampa su duota plokštuma	Tiesė plokštumoje

[a] žiūrėti toliau lentelėje esantį apibrėžimą; [b] taško A aplinka plokštumoje – tai kiekviena figūra, kurioje yra kažkoks skritulys su centru taške A; [c] nejungios figūros pavyzdys – perskirtų skritulių sąjunga

Paprastosios geometrinės figūros

Figūra	Brėžinys	Apibrėžimas (vienas galimų)	Pastabos
Pustiesė		Pustiesė $AB^{\to}$ su pradžia taške A — tai aibė tiesės AB taškų P, kurie tenkina vieną sąlygų — $|AP| + |PB| = |AB|$ arba $|AB| + |BP| = |AP|$	Tiesės taškas dalija ją į dvi pustieses
Atkarpa		Geometrinė vieta tų tiesės taškų (P), kurie nuo atkarpos galų yra nutolę atstumu, tenkinančiu sąlygą: $|AP| + |PB| = |AB|$	Kitaip: tiesės taškų, esančių tarp A ir B, geometrinė taškų vieta
Pusplokštumė		Plokštumos dalis, kurios kraštas yra tiesė, kartu su tiese	Nustatyta, pavyzdžiui, tiese ir tašku
Tiesės pusė		Plokštumos dalis, kurios kraštas yra tiesė, be tiesės	Kitaip – pusplokštumė be krašto
Taško pusė		Viena iš pustiesių, sutampančių su pačia tiese ir prasidedanti duotame taške, be paties taško	Kitaip – pustiesė be pradinio taško
Juosta		Bendra pusplokštumių $ab^{\to}$ ir $ba^{\to}$ dalis, jei $a \parallel b$ (jei $a = b$, tai juosta yra tiesė)	Juosta yra neaprėžta iškilioji figūra

Figūra	Brėžinys	Apibrėžimas (vienas galimų)	Pastabos
Laužtė		Figūra, sudaryta iš tokios atkarpų A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ..., $A_{n-1}A_n$ sekos, kad kiekvienos dvi atkarpos viena su kita turi tik vieną bendrą tašką	A_1, A_2, ..., A_n — laužtės viršūnės
Paprastoji laužtė		Laužtė, kurios atkarpos tenkina tokias sąlygas: 1) bet kurios dvi atkarpos su bendra viršūne nepriklausančios vienai tiesei; 2) bendru dviejų atkarpų tašku gali būti tik jų viršūnė; 3) duotas taškas gali būti daugiausiai dviejų atkarpų viršūne	Laužtės, kurios nėra paprastosios, vadinamos sudėtinėmis laužtėmis
Uždara paprastoji laužtė		Paprastoji laužtė, kurios pradžios viršūnė sutampa su pabaigos viršūne ($A_1 = A_n$)	Dalija plokštumą į dvi dalis: aprėžtą ir neaprėžtą
Skritulys		Aibė plokštumos taškų, kurių nuotolis nuo taško O (skritulio centro) ne didesnis nei r ($r > 0$)	Žr. p. 57
Apskritimas		Aibė plokštumos taškų, kurių nuotolis nuo taško O (apskritimo centro) yra lygus r ($r > 0$)	Apskritimas $o(O, r)$ yra skritulio $k(O, r)$ kraštas
Daugiakampis		Paprastoji uždaros laužtės ir apribotos figūros sąjunga	Žr. p. 50 ir 51
Kampas		Sąjunga dviejų pustiesių (kampo šonų) su bendru pradžios tašku (viršūne) ir vieno iš plotų, kuriuos tos pustiesės iškerpa iš plokštumos	Žr. toliau pateiktą lentelę

Kampų rūšys

Pavadinimas	Brėžinys	Apibrėžimas	Kampo matas
Ištęstinis		Kampas, kurio kraštinės yra viena kitą papildančios pustiesės	180°
Iškilasis		Kampas, kuris riboja iškilą figūrą	< 180°
Įgaubtasis		Kampas, kuris riboja neiškilą figūrą	> 180°
Kampai su viena bendra kraštine		Kampai, kurių bendra dalis yra jų bendra kraštinė	Žr. toliau
Gretutiniai kampai		Du iškilieji kampai, kurių viena kraštinė yra bendra, o kitos dvi kraštinės papildo viena kitą iki tiesės	Suma 180°
Kryžminis kampas		Kampas, kurio kraštinės papildo viena kitą iki duoto kampo kraštinių	Lygi duotam kampui
Statusis kampas		Kampas, lygus savo gretutiniam kampui	90°

Kampo matas: turi neneigiamą reikšmę; gretutinių kampų matai yra lygūs; kampo, kuris lygus dviejų gretutinių kampų sumai, matas lygus tų kampų matų sumai.

PLOKŠTUMOS TRANSFORMACIJOS

Transformacijos rūšis	Simbolis	Taško koordinatės po transformacijos[a][b]	Pastovūs taškai	Lygiškumas	Pavyzdys
		Izometrijos			
Tapačioji transformacija	E	(x_0, y_0)	Visi plokštumos taškai	Lyginis	
Lygiagretusis postūmis vektoriumi[c] $\vec{v} = \{a; b\}$	T_v	$(x_0 + a, y_0 + b)$	—	Lyginis	
Simetrija ašies Ox atžvilgiu	S_x	$(x_0, -y_0)$	Visi simetrijos ašies taškai	Nelyginis	
Simetrija ašies Ox atžvilgiu su postūmiu vektoriumi[c] $\vec{a}$		$(x_0 + a, -y_0)$	—	Nelyginis	
Centrinė simetrija su centru taške O	S_O	$(-x_0, -y_0)$	Taškas O – simetrijos centras	Lyginis	
Posūkis kampu α apie tašką O	O_α	$(x_0 \cos\alpha - y_0 \sin\alpha,$ $x_0 \sin\alpha + y_0 \cos\alpha)$	Taškas O – posūkio centras	Lyginis	
		Neizometrinės transformacijos			
Homotetija su centru O ir koeficientu s ($s \neq 0$)	J^s_O	(sx_0, sy_0)	Taškas O – homotetijos centras	—	
Sąspūdis išilgai ašies Oy su koeficientu s ($s \neq 0$)	P^s_x	(x_0, sy_0)	Visi ašies Ox taškai	—	
Stačiakampė projekcija į ašį Ox	P_x	$(x_0, 0)$	Visi ašies Ox taškai	—	

[a] taškas iš pradžių turi koordinates (x_0, y_0); [b] jei simetrijos centras arba išskirta ašis nesutampa su koordinačių sistemos pradžia arba ašimi Ox, tai transformuojamo taško koordinatės formulės sudėtingesnės; [c] darome prielaidą, kad vektorius nenulinis ir nelygiagretus ašiai Ox

Transformacijų savybės

Transformacija	Apibrėžimas	Kitos savybės	Rūšys
Izometrija	Transformacija, išlaikanti atstumus tarp taškų	Išsaugomas taškų priklausomumas tai pačiai tiesei; tiesių lygiagretumas; figūrų paviršių plotai; kampai tarp tiesių	Tapačiosios transformacijos, postūmis, centrinė simetrija, ašinė simetrija, simetrija su postūmiu, posūkis aplink tašką, postūmis
Panašumas	Transformacija, išlaikanti kampus tarp atkarpų	Išsaugomas taškų priklausomumas tai pačiai tiesei; tiesių lygiagretumas; bet kurių atkarpų santykiai lieka pastovūs; figūros ir jos vaizdo ploto santykis yra pastovus	Bet kuri izometrija arba homotetija, taip pat bet kuri šių transformacijų kombinacija
Sąspūdis (afininė transformacija)	Transformacija abipusiškai vienareikšmė, išsauganti taškų priklausomumą tai pačiai tiesei	Išsaugomas tiesių lygiagretumas; bet kurios atkarpos ir jos vaizdo atitinkamos atkarpos ilgio santykis yra pastovus; figūros ir jos vaizdo ploto santykis yra pastovus	Pavieniai atvejai: izometrijos, panašumai, stačiakampis sąspūdis

Visos transformacijos apgręžiamos. Neapgręžiama, pavyzdžiui, yra stačiakampė projekcija.

Kelių sutampančių transformacijų pavyzdžiai

Transformacija	Sudėties rezultatas	Pastabos
Du posūkiai aplink bendrą centrą kampais α ir β, $O_\alpha O_\beta$	Posūkis apie tą patį centrą kampu α + β, $O_{\alpha+\beta}$	Kelių posūkių suma yra posūkis
Du postūmiai: vektoriumi $\vec{v}$ ir vektoriumi $\vec{w}$, $T_w T_v$	Postūmis vektoriumi $\vec{v} + \vec{w}$, T_{v+w}	Kelių postūmių suma yra postūmis
Dvi centrinės simetrijos[a], $S_B S_A$	Transformacija T_{2AB}	Išvada: sudėjus postūmius ir centrines simetrijas gauname centrinę simetriją
Trys centrinės simetrijos[a]	Centrinė simetrija	
Ašinė simetrija ir postūmis	Simetrija su postūmiu	
Dvi ašinės simetrijos: Ašys tarpusavy statmenos	Centrinė simetrija su centru, sutampančiu su ašių susikirtimo tašku	Kiekvieną centrinę simetriją galime išskaidyti į dvi ašines simetrijas
Dvi ašinės simetrijos: Ašys tarpusavy lygiagrečios ir nutolusios atstumu *d*	Postūmis statmenu abejoms ašims vektoriumi, kurio ilgis yra 2*d*	Kiekvieną postūmį galime išskaidyti į dvi ašines simetrijas
Dvi ašinės simetrijos: Ašys kertasi kampu φ	Posūkis apie ašių kirtimosi tašką kampu 2φ	Kiekvieną posūkį galime išskaidyti į dvi ašines simetrijas
Lyginis ašinių simetrijų skaičius	Lyginė izometrija	(žr. ankstesnį puslapį)
Nelyginis ašinių simetrijų skaičius	Nelyginė izometrija	
Dvi homotetijos su bendru centru *O* ir koeficientais s_1 ir s_2, $J_O^{s_1}$ $J_O^{s_2}$	Homotetija su centru *O* ir koeficientu $s_1 \cdot s_2$, $J_O^{s_1 s_2}$	Sudėjus bet kokį homotetijos skaičių gauname homotetiją[b]
Homotetija su koeficientu *s* ir izometrija	Panašumas, kurio koeficientas *s*	Kiekvieną panašumą galime išskaidyti į homotetiją ir izometriją

[a] centrai nebūtinai turi sutapti; [b] centrai turi sutapti

KAI KURIOS TRANSFORMACIJOS ERDVĖJE

Erdvės transformacijos

Transformacija	Simbolis	Pastovūs taškai	L	Pastabos
Izometrijos[a]				
Tapačioji transformacija	E	Visi erdvės taškai	L	$EE = E$
Centrinė simetrija su centru taške *O*	S_O	Taškas *O* — simetrijos taškas	n	$S_O S_O = E$
Ašinė simetrija ašies *Ox* atžvilgiu	S_x	Visi simetrijos ašies taškai	L	$S_x S_x = E$
Simetrija plokštumos π atžvilgiu	S_π	Visi plokštumos simetrijos taškai	n	$S_\pi S_\pi = E$
Postūmis nenuliniu vektoriumi $\vec{v}$	T_v	—	L	$T_v T_w = T_{v+w}$
Posūkis apie *L* ašį kampu α (α ≠ 0, α ≠ 180°)	L_α	Visi *L* ašies taškai	L	$L_\alpha L_\beta = L_{\alpha+\beta}$
Simetrija su postūmiu[b]		—	n	
Simetrija su posūkiu[c]		—	n	
Sraigtinis judėjimas[d]		—	L	
Neizometrinės transformacijos (pavyzdžiai)				
Homotetija su centru *O* ir koeficientu *s* ($s \neq 0$)	J_O^s	Taškas *O*	—	Izometrijos ir panašumo sąjunga
Panašumas su centru *O* ir koeficientu *s* ($s > 0$)		Taškas *O*	—	Transformacija išlaiko kampų matus
Sąspūdis (afininė transformacija)		Priklausomai nuo transformacijos rūšies	—	Išlaiko vienatiesiškumą
Lygiagreti projekcija kryptimi x[e] į plokštumą π	P_π^x	Visi plokštumos π taškai	—	Erdvės transformacija į plokštumą

L — izometrijos lygiškumas (L, n — lyginės ir nelyginės izometrijos, tokios, kurių sąjungą galima sudaryti iš lyginio/nelyginio plokštumos simetrijų skaičiaus; lyginės izometrijos – tai vadinamieji erdvės judėjimai).

[a] duota išsami izometrijų klasifikacija; [b] sąjunga plokštuminės simetrijos ir postūmio su nenuliniu, lygiagrečiu plokštumai vektoriumi; [c] sąjunga plokštuminės simetrijos ir posūkio, su nenuliniu (ir skirtingu nei 180°) kampu, aplink statmeną į plokštumą ašį; [d] sąjunga posūkio su nenuliniu (ir skirtingu nei 180°) kampu ir postūmio, su nenuliniu, lygiagrečiu sukimosi ašiai, vektoriumi; [e] *x* — tiesė, kuri nėra lygiagreti plokštumai π

Pagrindinės projekcijų savybės

1. $P_\pi^x P_\pi^x = P_\pi^x$ (idempotentyvumas).
2. Lygiagrečių atkarpų ilgių (bet nelygiagrečių projekcijos atžvilgiu) ir jų projekcijų santykis yra pastovus. $|AB| : |CD| = |A'B'| : |C'D'|$.
3. Atkarpos centro projekcija yra projekcijos centras (atkarpai, nelygiagrečiai projekcijos krypčiai).

PAGRINDINĖS GEOMETRINĖS KONSTRUKCIJOS

Konstrukcija	Konstrukcijos elementai	Brėžinys	Pastabos
Atkarpos $\overline{AB}$ simetrijos ašis	1. Lankai su centrais taškuose A ir B bei spinduliu AB. 2. Tiesė per taškus C ir D		Simetrijos ašis dalija atkarpą $\overline{AB}$ pusiau ir yra jai statmena; ABC ir ABD — lygiakraščiai trikampiai
Tiesė, statmena duotai tiesei ir einanti per duotą tašką A	1. Lankas su centru taške A ir tokiu spinduliu, kuris kirstų tiesę dviejuose skirtinguose taškuose B ir C. 2. Simetriška atkarpa $\overline{BC}$		Trikampis ABC yra lygiašonis, atkarpos $\overline{BC}$ simetrijos ašis eina per tašką A
Tiesė, lygiagreti duotai tiesei ir einanti per duotą tašką A	1. Lankas su centru taške A, kertantis tiesę taškuose B ir C. 2. Lankas su centru taške A ir spinduliu BC, lankas su centru taške C ir spinduliu AB bei jų susikirtimo taškas D. 3. Tiesė AD		$ABCD$ — lygiagretainis
Atkarpos AB dalijimas į n lygių atkarpų	1. Pustiesė $AX^{\rightarrow}$ nesudaro bendra-tiesės su $AB^{\rightarrow}$. 2. Pustiesėje $AX^{\rightarrow}$ atidedame n lygių atkarpų $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$. 3. Tiesė a, einanti per taškus B ir A_n. 4. Tiesės, lygiagrečios tiesei a ir einančios per taškus $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$		Konstrukcijos teisingumas pagrįstas Talio teorema (brėžinyje atkarpa AB dalijama į tris lygias dalis)
Kampo su viršūne A pusiaukampinė	1. Lankas su centru taške A (bet kokio spindulio) ir jo susikirtimo su kampo kraštinėmis taškai (B ir C). 2. Atkarpos $\overline{BC}$ simetrijos ašis ir taškas D — tai lanko susikirtimo su simetrijos ašimi vieta. 3. Tiesė su taškais A ir D		Pusiaukampinė AD dalija kampą BAC pusiau ir yra lygiai nutolusių nuo kampo kraštinių taškų aibė
Apskritimo liestinė taške A	1. Lankas su centru taške A, kertantis apskritimą dviejuose taškuose B ir C. 2. Tiesė, einanti per tašką A, ir lygiagreti tiesei, einančiai per taškus B ir C		A — lietimosi taškas; liestinė yra statmena apskritimo spinduliui
Apskritimo centro nustatymas	1. Dvi, bet kurios nelygiagrečios apskritimo stygos: $\overline{AB}$ ir $\overline{CD}$. 2. Abiejų stygų simetrijos ašys. 3. Apskritimo centras yra simetrijos ašių kirtimosi taškas		Apskritimo centras nustatomas vienareikšmiai

Čia pateiktas konstrukcijas galima nubrėžti su skriestuvu ir liniuote (liniuotė be padalų). Kai kurias pateiktų konstrukcijų galima nubrėžti lengviau, jei turime kitokius įrankius, pavyzdžiui, statųjį trikampį

Keletas konstrukcijų, kurių negalime nubrėžti su skriestuvu ir liniuote

Konstrukcija	Paaiškinimai, pastabos	Neįvykdomumo įrodymas
Apskritimo kvadratūra	Radimas kvadrato, kurio plotas yra lygus apskritimo plotui	Ferdinandas (Ferdinand Lindemann) (1883)
Kampo trisekcija	Bet kurio[b] kampo dalijimas į tris lygias dalis	Pjeras Loranas Vantzelis (Pierre Laurent Wantzell) (1837)
Taisyklingasis septyniakampis	Užduotis lygiavertė pilnojo kampo padalijimui į septynias lygias dalis	Karlas Fridrichas Gausas (Carl Friedrich Gauss) (1796)[c]
Kubo dvigubinimas[d]	Kubo, kurio tūris būtų du kartus didesnis nei kubo su duota kraštine, kraštinės radimas	Pjeras Loranas Vantzelis (Pierre Laurent Wantzell) (1837)

[a] sprendimo, nesėkmingai, buvo ieškoma nuo senovės; [b] kai kuriems kampams (pavyzdžiui, statmenajam), šią užduotį galima išspręsti, bet vartojamas algoritmas netinka kitiems kampams; [c] Gausas įrodė tokį teiginį, kai n yra pirminis skaičius, tai iš taisyklingųjų n-kampių galima sukonstruoti tik tuos, kuriems n yra išreikštas išraiška $2^{2k} + 1$ ($k = 0$: trikampis, $k = 1$: penkiakampis, $k = 2$: septyniolikakampis ir t. t.); [d] vadinamoji Delo salos problema

GEOMETRIJOS TEIGINIAI

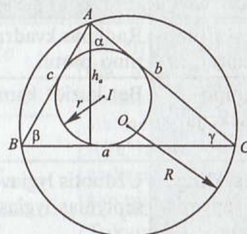
Problema	Brėžinys	Pagrindinės savybės	Pastabos
Lygiagrečiosios tiesės perkirstos tiese		$\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$; $\gamma = \gamma'$, $\delta = \delta'$	Atitinkamieji kampai
		$\alpha = \delta'$, $\beta = \gamma'$	Išorės priešiniai kampai
		$\alpha' = \delta$, $\beta = \gamma$	Vidaus priešiniai kampai
Talio teorema		$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DE}$; $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{BD}{CE}$	Atitinkamų atkarpų proporcingumas
Pitagoro teorema		Pagrindinė formulė: $a^2 + b^2 = c^2$ Papildomos formulės: $h^2 = ef$; $a^2 = ce$; $b^2 = cf$	Tik statmeniesiems trikampiams; a, b — statiniai; c — įžambinė; h — aukštinė nuleista į įžambinę; e, f — statinių projekcijos į įžambinę ($e + f = c$)
Teoremos apie apskritimą ir tašką		$PA \cdot PB = PC \cdot PD$	Tiesės AB ir CD — kirstinės su bendru tašku P (kuris gali būti apskritimo viduje arba išorėje); jeigu vietoj vienos kirstinės paimsime apskritimo liestinę ($C = D$), tada $PA \cdot PB = PC^2$
		$PA \cdot PB = PC \cdot PD$	

TRIKAMPIAI

Žymėjimai

A, B, C — viršūnės, a, b, c — kraštinės (kraštinių ilgiai); α, β, γ — kampai; R — apibrėžtinio apskritimo spindulys; r — įbrėžtinio apskritimo spindulys; h_a — aukštinė, nuleista į kraštinę a; S — plotas;

$p=\dfrac{a+b+c}{2}$ (pusperimetris).



Trikampio vidaus kampų suma

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spinduliai

$r=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ $\quad R=\dfrac{abc}{4rp}$ $\quad r=\dfrac{abc}{4Rp}$ (palygink su sinusų formule)

Bet kurie trikampiai — ploto skaičiavimo būdai

$S=\dfrac{ah_a}{2}=\dfrac{ab\sin\gamma}{2}$

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S=2R^2\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma$ $\quad S=\dfrac{abc}{4R}=rp$

Bet kurio trikampio trigonometrinės priklausomybės

$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

$\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta+\mathrm{tg}\,\gamma=\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma$

$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}=\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}$

Sinusų formulė: $2R=\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$

Kosinusų formulės:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$
$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$

Tangentų formulės:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

Ypatingosios atkarpos ir tiesės trikampyje

Atkarpa	Apibrėžimas	Brėžinys	Atkarpos ilgio formulė	Kirtimosi taškas
Trikampio aukštinė	Atkarpa, jungianti trikampio viršūnę ir jos statųjų projekciją priešingoje kraštinėje	$h_a=AH_A$	$h_a=\dfrac{bc}{2R}=b\sin\gamma=c\sin\beta$	Ortocentras[a]
Kraštinės simetrijos ašis	Tiesė, statmena kraštinei ir einanti per jos centrą		—	Apibrėžtinio apskritimo centras[ab]
Trikampio kraštinės pusiaukraštinė	Atkarpa, jungianti viršūnę su priešingos kraštinės centru	$m_a=AM_A$	$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$	Trikampio svorio centras
Kampo pusiaukampinė	Tiesės atkarpa, dalijanti viršūnės kampą pusiau tai atkarpa nuo viršūnės iki priešingos kraštinės	$l_a=AL_A$	$l_a=\dfrac{\sqrt{bc\left[(b+c)^2-a^2\right]}}{b+c}$	Įbrėžtinio apskritimo centras[ab]
Vidurio linija	Atkarpa, jungianti dviejų kraštinių vidurį (tiesė lygiagreti trečiai kraštinei)[c]		Tos kraštinės, kuriai ji lygiagreti, ilgio pusė	—[c]

[a] kiekviename trikampyje egzistuoja šios trys atkarpos arba tiesės, jos kertasi viename taške; [b] žr. formules ankstesniame puslapyje; [c] trys vidurio linijos apibrėžia trikampį DEF panašų į ABC, kurio plotas sudaro $\frac{1}{4}$ to trikampio

Ypatingosios trikampių rūšys

Trikampis	Brėžinys	Sąlyga	Pagrindinės priklausomybės	Paaiškinimai, pastabos
Smailusis		$\alpha, \beta, \gamma < 90°$	Formulės rasti S, h, R, r — kaip ir bet kuriam trikampiui	Apibrėžtinio apskritimo centras yra trikampio viduje
Statusis[a]		$\gamma=\frac{\pi}{2}=90°$	$S=\frac{ab}{2}$; atlikta Pitagoro teoremos sąlyga (žr. p. 51)	a, b — statiniai, c — įžambinė; apibrėžtinio apskritimo centras yra įžambinėje
Bukasis		Vienas kampų > 90°	Formulės rasti S, h, R, r — kaip ir bet kuriam trikampiui	Apibrėžtinio apskritimo centras yra trikampio išorėje
Lygiašonis		$a = b$	Išvada: $\alpha = \beta$; $c = a(2 - 2\cos\gamma)$	Turi mažiausiai vieną simetrijos ašį (turi tris simetrijos ašis, jei jis lygiakraštis)
Lygiakraštis		$a = b = c$; $\alpha = \beta = \gamma$	$h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$; $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$; $r=\frac{1}{3}h$; $R=\frac{2}{3}h$	Turi tris simetrijos ašis; svorio centro taškas, ortocentras bei įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų centrai sutampa

[a] ypatingi statieji trikampiai — tai Pitagoro (egiptietiški) trikampiai, su kraštinėmis, išreikštomis natūraliaisiais skaičiais (pavyzdžiui, 3, 4, 5)

Trikampių panašumo ir lygumo kriterijai

Trikampiai		Kongruentiški	Panašūs
Apibrėžimas		Trikampiai yra kongruentiški, jei egzistuoja izometrija, transformuojanti vieną trikampį į kitą	Trikampiai yra panašūs, jei egzistuoja panašumas, transformuojantis vieną trikampį į kitą
Brėžinys			
Kriterijus	bbb	Trys pirmo trikampio kraštinės yra lygios trims kito trikampio kraštinėms	Trys pirmo trikampio kraštinės yra proporcingos trims kito trikampio kraštinėms
	bkb	Dvi vieno trikampio kraštinės ir kampas tarp jų yra atitinkamai lygūs dviem kito trikampio kraštinėms ir kampui tarp jų	Dvi vieno trikampio kraštinės yra atitinkamai proporcingos dviem kito trikampio kraštinėms, o kampai tarp jų lygūs
	kbk / kk	Kraštinė ir du kampai, esantys prie jos, yra atitinkamai lygūs kito trikampio kraštinei ir kampams prie jos	Du vieno trikampio kampai yra lygūs dviem kito trikampio kampams[a]

[a] žinoma, kad tai atitinka visų trikampių kampų lygybei

Trikampių sprendimai

Duoti dydžiai	Nežinomų dydžių skaičiavimo būdai	Sprendimo egzistavimo sąlyga
	Statusis trikampis	
Kraštinė ir smailusis kampas	Antras kampas statusis = (90° minus duotas kampas), likusieji kampai iš sinusų teoremos	Visada egzistuoja sprendinys
Dvi kraštinės	Trečia kraštinė — iš Pitagoro teoremos, kampai — iš formulių apibrėžiančių trigonometrines funkcijas (sin, cos, tg)	Egzistuoja sprendinys, jeigu $a < c$, $b < c$ bei $a + b < c$
	Bet kuris trikampis	
Trys kraštinės: a, b ir c	Kampai α, β ir γ — iš kosinusų teoremos	Sprendinys egzistuoja, jei bet kurios kraštinės ilgis mažesnis nei likusių dviejų kraštinių ilgių suma
Dvi kraštinės (a, b) ir kampas tarp jų (γ)	c — iš kosinusų formulių, kampai α ir β iš sinusų arba kosinusų formulės	Visada egzistuoja sprendinys
Kraštinė (a) ir du kampai prie tos kraštinės (β ir γ)	Trūkstamas kraštines — iš sinusų formulės, trečią kampą — iš trikampio kampų sumos (180°)	Sprendinys egzistuoja, jeigu $\beta + \gamma < 180°$
Dvi kraštinės (b ir c) ir kampas prieš vieną iš jų (β)	Kampą γ — iš sinusų formulės, kampą α iš trikampio kampų sumos (180°), trečią kraštinę (a) iš sinusų formulės	Sprendinys neegzistuoja tik tada, kai $b < c$ ir $c \sin\beta > b$[a]

[a] egzistuoja du sprendiniai, jei $b < c$ ir $c \sin\beta < b$, kitais atvejais — vienas sprendinys

KETURKAMPIAI

Pažymėjimai ir bendros keturkampių savybės

S — plotas; a, b, c, d — kraštinės; d_1, d_2 — įžambinės; h — aukštinė; α — kampas tarp kraštinių; Δ — kampas tarp įžambinių.

$S=\frac{d_1\cdot d_2}{2}\cdot\sin\Delta$ $\quad \alpha + \beta = \gamma + \delta = 360°$

Sąlyga, kad galima būtų įbrėžti keturkampį į apskritimą: $a + c = b + d$.
Sąlyga, kad galima būtų keturkampį apibrėžti apskritimu: $\alpha + \gamma = \beta + \delta$.

Pagrindiniai keturkampiai

Pavadinimas	Brėžinys	S	Kitos formulės, pastabos
Trapecija[a]		$S=\frac{(a+b)h}{2}$	Dvi kraštinės (trapecijos pagrindai) yra lygiagrečios
Deltoidas		$S=\frac{d_1 d_2}{2}$	Įstrižainės tarpusavyje statmenos ir viena jų dalija kitą pusiau[b]; kraštinės poromis yra lygios ($a = b$, $c = d$)[b]
Lygiagretainis		$S = ah = ab\cdot\sin\alpha$	Priešais esančios kraštinės poromis yra lygiagrečios[b] ir lygios[b], priešingieji kampai poromis yra lygūs[b], įstrižainės kerta viena kitą pusiau[b]; turi simetrijos centrą[b]
Rombas		$S=ah=\frac{1}{2}d_1d_2 = a^2\sin\alpha$	Lygiagretainis, kurio visos kraštinės yra lygios[b]; lygiagretainis, kurio įstrižainės kertasi stačiuoju kampu[b]
Stačiakampis		$S=ab=\frac{d^2}{2}\cdot\sin\Delta$	Lygiagretainis, kurio visi kampai yra statieji; $d_1 = d_2 = \sqrt{a^2+b^2}$; $\mathrm{tg}\frac{\Delta}{2}=\frac{b}{a}$
Kvadratas		$S=a^2=\frac{1}{2}d^2$	Taisyklingas keturkampis; rombas, kuris kartu yra stačiakampis; $d_1 = d_2 = \sqrt{2}a$; $\Delta=90°$

[a] ypatingos rūšies stačioji trapecija (viena kraštinių statmena abiems pagrindams) ir lygiašonė trapecija (dvi kraštinės, skirtingos nuo pagrindų, yra vienodo ilgio); [b] iš kiekvienos savybės pažymėtos žyme[b], išplaukia ir likusios savybės

Ypatingosios stačiakampio rūšys

Pavadinimas	$a : b$	Brėžinys	Ypatingos savybės, pastabos
Kvadratas	1 : 1		Visos kraštinės, kampai ir įžambinės yra lygios; įžambinės kertasi stačiuoju kampu; formulės – aukščiau esančioje lentelėje
Sunormintas stačiakampis	$\sqrt{2} : 1$		Padaliję pusiau gauname du sunormintus stačiakampius, taikomus poligrafijoje (pavyzdžiui: formatai A4, A5)
Auksinis stačiakampis	$\varphi : 1$		Atkirpus kvadratą, lieka mažesnis auksinis stačiakampis; ilgio proporcija (φ = 1,618…, 7 puslapis) laikoma labai malonia akiai; sutinkamas Graikijos architektūroje

DAUGIAKAMPIŲ KLASIFIKACIJA

Rinktinės daugiakampių rūšys

Daugiakampis	Apibrėžimas[a]	Pavyzdžiai
Iškilusis	Daugiakampis, kuris yra iškilioji figūra (žr. 45 puslapis)	Trapecija, lygiagretainis, trikampis
Įgaubtasis	Daugiakampis, nesantis iškilioji figūra	Kai kurie deltoidai, pentagrama
Pusiautaisyklingasis	Daugiakampis, kurio visos kraštinės arba visi kampai lygūs	Stačiakampis (kampai lygūs), rombas (lygios kraštinės)
Taisyklingasis	Daugiakampis, kurio visos kraštinės ir kampai yra lygūs[b]	Lygiakraštis trikampis, kvadratas
Žvaigždiškasis	Įgaubtas daugiakampis, kurio kraštinės ir kampai yra lygūs	Pentagrama

[a] bendras daugiakampio apibrėžimas žr. 46 puslapį; [b] kartais papildomai reikalaujama, kad daugiakampis būtų iškilusis

Bendros daugiakampių savybės

n-kampio vidinių kampų suma = $(n-2)\cdot 180°$.

Kampų, gretimų vidiniams, iškiliojo n–kampio kampų suma = 360°.

Iškiliojo n-kampio įstrižainių skaičius = $\frac{1}{2}n(n-3)$.

Žvaigždiniai ir taisyklingieji daugiakampiai

Figūros pavadinimas	Brėžinys	Apibrėžtinio apskritimo spindulys[a] R	Įbrėžtinio apskritimo spindulys[a] r	Plotas S	Vidiniai kampai
Iškilosios					
Lygiakraštis trikampis		$\frac{\sqrt{3}}{3}a$	$\frac{\sqrt{3}}{6}a$	$\frac{\sqrt{3}}{4}a$	60°
Kvadratas		$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	a^2	90°
Taisyklingasis penkiakampis		$\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}a$	$\frac{1}{\sqrt{20-\sqrt{5}}}a$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2$	108°
Taisyklingasis šešiakampis		a	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$	120°
Taisyklingasis aštuoniakampis		$\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}a$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}a$	$2(1+\sqrt{2})a^2$	135°
Taisyklingasis n-kampis (iškilusis)[a]		$\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}a$	$\frac{1}{2}\left(\text{ctg}\frac{\pi}{n}\right)a$	$\frac{n}{4}\left(\text{ctg}\frac{\pi}{n}\right)a^2$	$\frac{n-2}{n}180°$
Žvaigždiniai					
Pentagrama		$\frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}a$	$\frac{1}{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}a$	sudėtinga formulė	36°

a — daugiakampio kraštinės ilgis. [a] kiekvienam taisyklingam n-kampiui teisinga $r = R\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Taisyklingojo n-kampio įžambinės $d_k = a\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$ $(k > 1)$.

SKRITULYS IR JO DALYS

Skritulys ir jo dalys

Figūra	Brėžinys	Plotas[a]	Kitos formulės, pastabos[a]
Skritulys		$S = \pi r^2$	Ilgis: $L = 2\pi r$. Iš figūrų su duotu ilgiu skritulys turi didžiausią plotą
Skritulio išpjova		$S=\frac{rL}{2}=\frac{\alpha\pi r^2}{360°}=\frac{\alpha}{360°}\pi r^2$ (α išreikšta laipsniais)	$L=\frac{\alpha}{180°}\pi r$
Skritulio nuopjova		$S=\left(\frac{\pi\alpha}{360°}-\frac{\sin\alpha}{2}\right)r^2$	$h=\frac{f^2}{2r}=r-\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-c^2}$; $c=2\sqrt{2hr-h^2}$
Dviejų apskritimų bendra dalis		$S=r_1^2\left(\frac{90°-\alpha}{360°}\pi-\frac{\sin 2\alpha}{2}\right)+$ $+r_2^2\left(\frac{\alpha}{360°}\pi-\frac{\sin 2\alpha}{2}\right)$	α — centrinis kampas su centru mažesniam skritulyje, besiremiantis į didžiausią lanką, priklausantį bendrai abiejų apskritimų daliai

[a] kampai, pažymėti simboliu α, išreikšti kampiniais laipsniais

Atkarpos ir kampai skritulyje. Apibrėžimai

Dydis	Apibrėžimas	Pastabos
Centrinis kampas	Kampas su viršūne, esančia skritulio centre	Žiūrėti teiginius kitoje lentelėje
Įbrėžtasis kampas	Kampas su viršūne, priklausančia skritulio apskritimui	
Apskritimo styga	Atkarpa, kurios galai priklauso apskritimui	
Skersmuo	Styga, einanti per apskritimo centrą	Tai ilgiausia styga

Stygos ir kampai skritulyje

Problema	Teiginys	Brėžinys
Centriniai kampai	Centriniai kampai, kurie remiasi į vienodo ilgio stygas yra lygūs (brėžinyje kampas AOB lygus kampui COD)	
Įbrėžtieji kampai	Įbrėžtieji kampai, kurie remiasi į tą patį lanką (į tą pačią stygą), yra lygūs	
Įbrėžtasis kampas, kuris remiasi į skersmenį	Kiekvienas įbrėžtasis kampas, kuris remiasi į apskritimo skersmenį, yra statusis	
Įbrėžtasis kampas ir centrinis kampas	Centrinis kampas yra du kartus didesnis nei įbrėžtasis kampas, kuris remiasi į tą patį lanką	
Kampas tarp stygos ir liestinės	Smailusis kampas, esantis tarp stygos ir liestinės, einančios per vieną stygos galą, yra lygus įbrėžtajam kampui, kuris remiasi į duotąją stygą	

ERDVINIAI KŪNAI

Svarbesni daugiasieniai

Erdvės kūnas	Brėžinys	Tūris	Paviršiaus plotas	Pastabos
Kubas		$V = a^3$	$S = 6a^2$	$d = a\sqrt{3}$
Stačioji prizmė		$V = abc$	$S = 2(ab + bc + ca)$	$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
Prizmė		$V = h \cdot S_p$	$S_š = h \cdot L$; $S = 2S_p + S_š$	Jeigu briaunos yra ⊥ pagrindui, tai prizmė vadinama paprastąja (tada $h = l$)
Paprastoji piramidė		$V = \frac{1}{3}S_p h$	$S = S_p + S_š$	Pagrindas yra daugiakampis, šoninės sienos — tai trikampiai su bendra viršūne
Taisyklingoji piramidė		$V = \frac{1}{3}S_p h$	$S_š = \frac{n}{2}al$	Pagrindas yra taisyklingasis n-kampis su briauna a, apotemų ilgiai vienodi
Nupjautinė piramidė		$V = \frac{h}{3} \times \left(S_{p_1} + S_{p_2} + \sqrt{S_{p_1}S_{p_2}}\right)$	$S = S_š + S_{p_1} + S_{p_2}$	Pagrindai — panašūs daugiakampiai, kurie yra lygiagretūs
Prizmatoidas		$V = \frac{h}{6}\left(S_{p_1} + 4S_m + S_{p_2}\right)$	$S = S_š + S_{p_1} + S_{p_2}$	Pagrindai — lygiagretūs daugiakampiai; S_m — pjūvio, nubrėžto per aukštinės h, pusę, plotas

V — tūris; S — bendras plotas; $S_š$ — šoninis plotas; S_p — pagrindo plotas; h — aukštinė; l — apotemos ilgis (šoninės sienos aukštinė); L — pagrindo perimetras; d — įžambinė

Taisyklingieji briaunainiai (Platono erdviniai kūnai)

	Tetraedras	Kubas	Oktaedras	Dodekaedras	Ikosaedras
Sienos	4 trikampiai	6 kvadratai	8 trikampiai	12 penkiakampių	20 trikampių
Briaunos	6	12	12	30	30
Viršūnės	4	8	6	20	12
Brėžinys					
Paviršiaus plotas	$S = \sqrt{3}a^2$	$S = 6a^2$	$S = 2\sqrt{3}\,a^2$	$S = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\,a^2$	$S = 5\sqrt{3}\,a^2$
Tūris	$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$	$V = a^3$	$V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$	$V = \sqrt{15 + 7\sqrt{5}}\,\frac{a^3}{4}$	$V = \frac{5}{12}\sqrt{3 + \sqrt{5}}\,a^3$
φ	70°33′	90°	109°28′	116°34′	138°11′

a — kiekvienos briaunainio kraštinės ilgis; φ — kampas tarp sienų su bendrąja briauna

Oilerio iškiliųjų briaunainių teorema

Viršūnių skaičius + sienų skaičius = briaunų skaičius + 2

Svarbesni kreivieji erdvės kūnai

Erdvės kūnas	Brėžinys	Tūris	Kitos formulės	Pastabos
Erdviniai sukimosi kūnai				
Rutulys		$V = \frac{4}{3}\pi R^3$	$S = 4\pi R^2$	Kiekvienas rutulio pjūvis plokštuma yra skritulys
Ištemptasis sukimosi[a] elipsoidas		$V = \frac{4}{3}\pi a b^2$	$S = 2\pi b \times \left(b + \frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right)$	$a > b$; $\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$
Suplotasis sukimosi[a] elipsoidas		$V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$	$S = 2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$	
Ritinys		$V = \pi R^2 h$	$S_b = 2\pi Rh$; $S = 2\pi R(h + R)$	Skersinis pjūvis Skritulys
Kūgis		$V = \frac{\pi}{3}R^2 h$	$S_b = \pi Rl$; $S = \pi R(R + l)$; $l = \sqrt{h^2 + R^2}$	Viršūnė yra virš pagrindo centro
Nupjautinis kūgis		$V = \frac{\pi}{3}h\left(R^2 + Rr + r^2\right)$	$S_b = \pi(R + r)\,l$; $S = S_b + \pi R^2 + \pi r^2$; $l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$	Pagrindai yra lygiagretūs vienas kito atžvilgiu
Toras		$V = 2\pi^2 Rr^2$	$S = 4\pi^2 Rr$	
Statinė		$V = \frac{\pi h}{15}(8R^2 + 4rR + 3r^2)$		Kreivė L — tai parabolės[b] lankas
Rutulio išpjova		$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$	$S = \pi R\,(2h + a)$	$a = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{h(2R-h)}$
Rutulio nuopjova		$V = \pi h^2 R - \frac{\pi}{3}h^3$	$S_b = 2\pi Rh$; $S = S_b + \pi a^2$	
Erdvinis nesukimosi kūnas				
Triašis elipsoidas		$V = \frac{4}{3}\pi abc$	Nėra paprastos formulės plotui išreikšti	a, b, c — elipsoido pusašiai

[a] palyginti su triašiu elipsoidu; [b] jei L yra rutulio lankas, tai apytiksliai teisinga formulė $V \approx \frac{1}{3}\pi h\,(2R^2 + r^2)$

KOORDINAČIŲ SISTEMOS

Pagrindinės koordinačių sistemų rūšys plokštumoje

Sistema	Brėžinys	Koordinatės	Kitimo sritis	Dviejų taškų atstumas
Dekartoᵃ	$P(x, y)$; x, y, 0	x – abscisė	$(-\infty, +\infty)$	$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
		y – ordinatė	$(-\infty, +\infty)$	
Polinė	$P(\rho, \varphi)$; φ, ρ, 0	ρ — atstumas nuo poliaus (polinis spindulys)	$[0, +\infty)$[b]	$d=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$
		φ — polinis kampas (amplitudė, fazė)	$[0, 2\pi)$[bc]	

[a] stačiakampė koordinačių sistema; [b] jei $\rho = 0$, tai polinis kampas neapibrėžtas; [c] galime tarti, kad φ įgyja bet kokias reikšmes iš intervalo $(-\infty, +\infty)$

Dekarto sistemos keitimas į polinę ir atvirkščiai

$x = \rho\cos\varphi$ $\quad y = \rho\sin\varphi$

$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad \sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad \cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad (\rho > 0)$

VEKTORIAI

Pagrindiniai veiksmai su vektoriais

Veiksmas	Užrašas	Savybės	Rezultatas = 0...
Vektoriaus daugyba iš skaičiaus	$\vec u = a\cdot\vec v$	Jungiamumas: $a\cdot(b\cdot\vec v) = (a\cdot b)\,\vec v$ Skirstomumas: $a\cdot(\vec v+\vec w) = (a\cdot\vec v) + (a\cdot\vec w)$ $(a+b)\cdot\vec v = (a\cdot\vec v) + (b\cdot\vec v)$	...jei $a = 0$ arba $\vec v=\vec 0$
Vektorių sudėtis	$\vec u=\vec v+\vec w$	Perstatomumas: $\vec v+\vec w=\vec w+\vec v$ Jungiamumas: $(\vec u+\vec v)+\vec w=\vec u+(\vec v+\vec w)$ Trikampio nelygybė: $\lvert\vec a+\vec b\rvert\le\lvert\vec a\rvert+\lvert\vec b\rvert$	...jeigu $\vec v$ ir $\vec w$ yra priešingieji vektoriai (lygiagretūs, vienodo ilgio ir priešingos krypties)
Skaliarinė sandauga	$a=\vec v\circ\vec w$	Perstatomumas: $\vec u\circ\vec w=\vec w\circ\vec v$ Skirstomumas sudėties atžvilgiu: $\vec u\circ(\vec v+\vec w)=\vec u\circ\vec v+\vec u\circ\vec w$ Jungiamumas daugybos atžvilgiu[a]: $(a\cdot\vec v)\circ\vec w=a\cdot(\vec v\circ\vec w)$	... jeigu $\vec v$ arba $\vec w$ nuliniai vektoriai arba jie statmeni
Vektorinė sandauga[b]	$\vec u=\vec v\times\vec w$	Antikomutatyvumas: $\vec v\times\vec w=-\vec w\times\vec v$ Skirstomumas sudėties atžvilgiu: $\vec u\times(\vec v+\vec w)=\vec u\times\vec v+\vec u\times\vec w$ Jungiamumas daugybos atžvilgiu[a]: $(a\cdot\vec v)\times\vec w=a\cdot(\vec v\times\vec w)$	... jeigu $\vec v$ arba $\vec w$ nuliniai vektoriai arba jie yra lygiagretūs

[a] paprastojo jungiamumo bendru atveju nebūna; [b] veiksmas neįvykdomas plokštumoje; vektorius, kuris yra daugybos rezultatas, yra statmenas abiems dauginamiesiems

Koordinatės plokštumoje ir erdvėje, vektoriai

Objektas	Koordinatės plokštumoje	Koordinatės erdvėje
Taškas A	$[A_x, A_y]$	$[A_x, A_y, A_z]$
Atkarpos ilgis $\lvert AB\rvert$	$\sqrt{(A_x-B_x)^2+(A_y-B_y)^2}$	$\sqrt{(A_x-B_x)^2+(A_y-B_y)^2+(A_z-B_z)^2}$
Atkarpos $\overline{AB}$ centro koordinatės	$\left[\dfrac{A_x+B_x}{2}, \dfrac{A_y+B_y}{2}\right]$	$\left[\dfrac{A_x+B_x}{2}, \dfrac{A_y+B_y}{2}, \dfrac{A_z+B_z}{2}\right]$
Vektorius	$\vec v=\{v_x;\ v_y\}$	$\vec v=\{v_x;\ v_y;\ v_z\}$
Vektorius su pradžia taške A ir taške B	$\vec v=\{B_x-A_x;\ B_y-B_y\}$	$\vec v=\{B_x-A_x;\ B_y-A_y;\ B_z-A_z\}$
Nulinis vektorius	$\vec 0=\{0;\ 0\}$	$\vec 0=\{0;\ 0;\ 0\}$
Vektorius, priešingas vektoriui $\vec v$	$-\vec v=\{-v_x;\ -v_y\}$	$-\vec v=\{-v_x;\ -v_x;\ -v_z\}$
Vektoriaus ilgis	$\lvert\vec v\rvert=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$	$\lvert\vec v\rvert=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$
Vektorių suma $\vec u=\vec v+\vec w$	$\vec u=\{v_x+w_x;\ v_y+w_y\}$	$\vec u=\{v_x+v_x;\ v_y+w_y;\ v_z+w_z\}$
Skaičiaus ir vektoriaus sandauga $\vec u = a\cdot\vec v$	$\vec u=\{a\cdot v_x;\ a\cdot v_y\}$	$\vec u=\{a\cdot v_x;\ a\cdot v_y;\ a\cdot v_z\}$
Skaliarinė vektorių sandauga $a=\vec v\circ\vec w$	$a = v_x\cdot w_x + v_y\cdot w_y$	$a = v_x\cdot w_x + v_y\cdot w_y + v_z\cdot w_z$
Vektorinė sandauga $\vec u=\vec v\times\vec w$	—	$\vec u=\{v_y\cdot w_z-v_z\cdot w_y;\ v_z\cdot w_x-v_x\cdot w_z;\ v_x\cdot w_y-v_y\cdot w_x\}$

Skaliarinė ir vektorinė sandauga, kampas tarp vektorių

$\vec v\circ\vec w=\lvert\vec v\rvert\cdot\lvert\vec w\rvert\cdot\cos\alpha$ (šią formulę galime taikyti norėdami apibrėžti kampą tarp vektorių)

$\lvert\vec v\times\vec w\rvert=\lvert\vec v\rvert\cdot\lvert\vec w\rvert\cdot\sin\alpha$

TIESĖS LYGTYS

Skirtingos tiesės lygties išraiškos

Išraiška	Lygtis	Prielaida	Brėžinys	Tiesės apibūdinimas
Bendroji	$Ax + By + C = 0$	$A \neq 0$ arba $B \neq 0$		Tiesė, statmena vektoriui $\vec{n}$ ir einanti per duotą tašką $P(x_0, y_0)$; $C = -(Ax_0 + By_0)$
Ašinė	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	$a \neq 0$ ir $b \neq 0$		Tiesė, atkertanti koordinačių sistemos ašyse atkarpas, kurios yra lygios atitinkamai a ir b
Kryptinė	$y = mx + b$	—		Tiesė, sudaranti su ašimi Ox kampą, kurio tangentas yra lygus m, ir atkertanti ašyje Oy atkarpą b
Normalioji	$y \sin\beta + x \cos\beta = d$	—		Tiesė, nutolusi nuo koordinačių sistemos pradžios atstumu d ir tokia, kad jos normalė kerta ašį Ox kampu β
Determinantinė	$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ p & q \end{vmatrix} = 0$	$p \neq 0$ arba $q \neq 0$		Tiesė, lygiagreti vektoriui $\vec{v}$ ir einanti per duotą tašką $P(x_0, y_0)$
Parametrinė	$x = x_0 + pt$, $y = y_0 + qt$	$p \neq 0$ arba $q \neq 0$		
Dvitaškė	$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}$	$x_1 \neq x_2$, $y \neq y_2$		Tiesė einanti per du duotus taškus: $P_1(x_1, y_1)$ ir $P_2(x_2, y_2)$
Polinė	$\rho = \frac{d}{\cos(\varphi - \beta)}$	$d \neq 0$[a]		Tiesė, kurios arčiausias poliui (žr. p. 60) taškas polinėje sistemoje turi koordinates (d, β)[ab]

[a] tiesės, einančios per polių lygtis yra tokia: $\varphi = \beta$; [b] sąlygos kaip tiesei, apibrėžiamai normaliąja lygtimi

Žymėjimai ir sąryšiai tarp parametrų

$m = \operatorname{tg}\alpha$ — krypties koeficientas; d — tiesės atstumas nuo koordinačių pradžios; $\vec{n} = \{A; B\}$ — vektorius, statmenas tiesei; $\vec{v} = \{p; q\}$ — vektorius, lygiagretus tiesei

$$m = -\frac{b}{a} = -\frac{A}{B} \qquad a = -\frac{C}{A} \qquad b = -\frac{C}{B}$$

$$\cos\beta = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad \sin\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad d = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

Formulėse sin β ir cos β reikia įrašyti ženklą priešingą ženklui C.

Taškai ir tiesės plokštumoje. Priklausomybės

Problema	Tiesės lygties išraiška		Pastabos
	Bendroji	Kryptinė[a]	
δ, taško $P(x_0, y_0)$ atstumas nuo tiesės	$\delta = \frac{\lvert Ax_0 + By_0 + C \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$	$\delta = \frac{\lvert mx_0 - y_0 + b \rvert}{\sqrt{1 + m^2}}$	$\delta = \lvert x_0 \cos\beta + y_0 \sin\beta - d \rvert$
φ, kampas tarp tiesių	$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$	$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}$	Formulė netinka statmenosioms tiesėms
Tiesių statmenumo sąlyga	$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$	$m_1m_2 = -1$	
Tiesių lygiagretumo sąlyga	$A_1B_2 - A_2B_1 = 0$	$m_1 = m_2$	

[a] tokios išraiškos lygtimi negalime apibrėžti tiesių, lygiagrečių ašiai Oy

Parinktosios tiesių ir plokštumų lygtys erdvėje

Išraiška	Lygtis	Prielaidos	Apibūdinimas
Plokštumos lygtis			
Bendroji plokštumos	$Ax + By + Cz + D = 0$	$A \neq 0$ arba $B \neq 0$ arba $C \neq 0$	Plokštuma, statmena vektoriui, kurio koordinatės $\{A, B, C\}$ ir einanti per tašką $P_1(x_1, y_1, z_1)$; $D = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1)$
Ašinė	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$	$a \neq 0$, $b \neq 0$ ir $c \neq 0$	Plokštuma, atkertanti koordinačių sistemos ašyse atkarpas, kurių ilgiai a, b ir c
Tiesės lygtis			
Bendroji tiesės	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$	—	Tiesė, kuri yra dviejų plokštumų susikirtimo rezultatas
Dvitaškė	$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2}$	$x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$	Tiesė, einanti per du skirtingus taškus $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ir $P_2(x_2, y_2, z_2)$
Parametrinė	$x = x_1 + pt$, $y = y_1 + qt$, $z = z_1 + rt$	$p \neq 0$ arba $q \neq 0$ arba $r \neq 0$	Tiesė, lygiagreti vektoriui, kurio koordinatės $\{p, q, r\}$ ir einanti per duotą tašką $P_1(x_1, y_1, z_1)$

Lygiagretumo sąlygos

Figūra	Sąlyga[a]	Pastabos
Dvi tiesės	$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$	Jei kuris nors vardiklis yra nulis, tai ir atitinkamas skaitiklis turi būti nulis
Dvi plokštumos	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$	Jei kuris nors vardiklis yra nulis, tai ir atitinkamas skaitiklis turi būti nulis
Plokštuma ir tiesė	$Ap + Bq + Cr = 0$	Sąlyga lygiavertė tai, kuri sako, kad tiesės krypties vektoriaus ir normaliojo plokštumos vektoriaus skaliarinė sandauga būtų lygi nuliui

[a] plokštumos lygtis bendrojoje išraiškoje ir tiesės lygtis parametrinėje išraiškoje

PLOKŠTUMOS KREIVIŲ LYGTYS

Pagrindinės kreivių lygčių rūšys

Lygties išraiška	Bendra formulė	Pavyzdys	Paaiškinimai, pastabos
Paprastoji (Dekarto sistemoje)	$y = f(x)$	$y = x^2$ (parabolė)	Išraiška dažniausiai vartojama mokykloje
Paprastoji (polinėje sistemoje)	$\rho = f(\varphi)$	$\rho = R$ (apskritimas) $\rho = a \cdot \varphi$ (Archimedo spiralė)	Plg. formules p. 60, 67
Neišreikštinė	$F(x, y) = 0$	$x^2 + y^2 = R^2$ (apskritimas)	Kartais neįmanoma pakeisti į paprastąją išraišką
Parametrinė	$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$	$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ (apskritimas)	Kreivės taškų koordinatės priklauso nuo parametro t

Elementariosios funkcijų transformacijos

Lygties transformacija	Grafiko transformacija	Funkcijos, nekeičiančios savo grafiko	Brėžinys
$f(x) \to f(x + a)$ (kai $a > 0$)	Postūmis (į kairę per a vienetų)	Pavyzdžiui, periodinės funkcijos su periodu a	
$f(x) \to f(x) + a$ (kai $a > 0$)	Postūmis (į viršų per a vienetų)	Nesikeičia lygties $x = a$ grafikas	
$f(x) \to f(-x)$	Ašinė simetrija ašies Oy atžvilgiu	Lyginės funkcijos	
$f(x) \to -f(x)$	Ašinė simetrija ašies Ox atžvilgiu	Funkcija $y = 0$, lygties $x = a$ grafikas	
$f(x) \to -f(-x)$	Centrinė simetrija koordinačių sistemos pradžios atžvilgiu	Nelyginės funkcijos	
$f(x) \to f(ax)$ ($a > 0, a \neq 1$)	Sąspūdis išilgai ašies Ox su koeficientu a	Pastoviosios funkcijos	
$f(x) \to a\,f(x)$ ($a > 0, a \neq 1$)	Ištempis išilgai ašies Oy su koeficientu a	Funkcija $y = 0$, lygties $x = a$ grafikas	
$f(x) \to f(\lvert x \rvert)$	Dalies grafiko ašinė simetrija (kai $x < 0$) ašies Oy atžvilgiu	Lyginės funkcijos	
$f(x) \to \lvert f(x) \rvert$	Dalies grafiko ašinė simetrija (kai $y < 0$) ašies Ox atžvilgiu	Neneigiamai aprėžtos funkcijos, $f(x) \geq 0$	
$f(x) \to f^{-1}(x)$	Ašinė simetrija ašies $y = x$ atžvilgiu	$y = x$, $y = -x$	

FUNKCIJOS MONOTONIŠKUMO TYRIMAS

Funkcijos[a] tyrimo etapas	Gautos žinios	Paaiškinimai, pastabos[a]
Įžanginiai duomenys		
Išanalizuoti reiškinį $y = f(x)$ (vardiklis, neigiamų skaičių šaknys ir logaritmai ir t. t.)	Apibrėžimo sritis	Apibrėžimo sritis — aibė tokių x, su kuriais $f(x)$ apibrėžta
Palyginti $f(x)$ ir $f(-x)$	Lyginumas arba nelyginumas	Lyginės funkcijos: $f(x) = f(-x)$; nelyginės funkcijos: $f(-x)$ ir $-f(x)$
Paieškoti tokių a reikšmių, su kuriomis $f(x + a) = f(x)$	Periodiškumas	Sutinkama, pavyzdžiui, trigonometrinėse funkcijose
Asimptočių apibrėžimas[b]		
Apskaičiuoti $a = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$	Horizontaliosios asimptotės $y = a$	Gali egzistuoti, jei apibrėžimo sritis iki begalybės
Patikrinti ar kažkokiam m teisinga $a = \lim\limits_{x \to \pm m} f(x) = x \to m$	Vertikaliosios asimptotės $x = m$	Intervalų galai[c] ir taškai, kuriuose funkcija neapibrėžta[d]
Apskaičiuoti $a = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$	Pasvirusiosios asimptotės (įstrižos), $y = ax + b$	Pasvirusioji asimptotė egzistuoja, riba a egzistuoja ir yra baigtinė, taigi $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax]$
Skaičiavimai taikant funkcijų išvestines		
Apskaičiuoti pirmąją išvestinę $f'(x)$ ir nustatyti apibrėžimo sritį	Taškai, kuriuose $f'(x)$ neegzistuoja	Tokiu būdu galima rasti smailėjimo[e] ir trūkio taškus
Apskaičiuoti antrąją išvestinę $f''(x)$	Palyginti toliau	Palyginti toliau
Ištirti, kada $f'(x) = 0$ (išspręsti atitinkamą lygtį)	Galimi ekstremumai	Maksimumas, jei $f''(x) < 0$, minimumas, jei $f''(x) > 0$
Ištirti funkcijos $f'(x)$ ribas intervalų galuose[c] ir taškuose, kuriuose funkcija $f'(x)$ yra neapibrėžta[d]		Reikia ištirti, kokia yra funkcija tuose taškuose
Ištirti funkcijos išvestinės ženklą įvairiuose intervaluose	Funkcijos monotoniškumas	Funkcija didėja intervale, kuriame $f'(x) > 0$ ir mažėja, kai $f'(x) < 0$
Ištirti, kada $f''(x) = 0$	Galimi kreivės perlinkio taškai	Perlinkio taško aplinkoje $f(x)$, $f'(x)$ ir $f''(x)$ turi būti apibrėžtos
Ištirti antrosios išvestinės ženklą	Funkcijos įgaubtumas ir iškilumas	Funkcija įgaubta intervale, kuriame $f''(x) > 0$ ir iškila su tais x, su kuriais $f''(x) < 0$
Baigiamieji skaičiavimai		
Apskaičiuoti $f(0)$ Išspręsti $f(x) = 0$	Susikirtimo taškai su koordinačių sistemos ašimis	Reikia patikrinti, ar 0 ir funkcijos $f(x) = 0$ šaknys priklauso apibrėžimo sričiai
Apskaičiuoti funkcijos reikšmę ypatinguose taškuose	Kiti ypatingi taškai, priklausantys kreivės grafikui	Apskaičiuojame funkcijos reikšmę ekstremumų ir perlinkio taškuose, taip pat ribas trūkio taškuose

[a] funkcijoms, kurių išraiška $y = f(x)$; [b] tiesės, kurių atstumas nuo kreivės artėja prie nulio, kai kreivė artėja į begalybę; [c] vienpusės ribos; [d] ribos iš kairės ir dešinės; [e] pavyzdžiui, $f(x) = \lvert x \rvert$ smailėja, kai $x = 0$; [f] pavyzdžiui, $f(x) = \lvert x \rvert / x$ nėra tolydi, kai $x = 0$

ELIPSĖ, PARABOLĖ, HIPERBOLĖ

Problema	Elipsė	Parabolė	Hiperbolė
Brėžinys			
Klasikinis apibrėžimas (geometrinių taškų vieta plokštumoje)	Taškai, kurių atstumų nuo dviejų apibrėžtų taškų (židinių) suma yra pastovi (ir lygi $2a$)	Taškai, lygiai nutolę nuo duoto taško (židinio) ir duotos tiesės (direktrisės)	Taškai, kurių atstumų nuo dviejų taškų (židinių) skirtumas yra pastovus (lygus $2a$)
Kanoninė lygtis	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$y^2 = 2px$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Paaiškinimai	a, b — pusašės $(a, b > 0)$	p — parametras $(p > 0)$	a, b — pusašiai $(a, b > 0)$
Židiniai[a]	$(-c, 0)$ ir $(c, 0)$, $c^2 = a^2 - b^2$	$\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	$(-c, 0)$ ir $(c, 0)$, $c^2 = a^2 + b^2$
Direktrisės[bc]	$x=-\frac{a^2}{c}$; $x=\frac{a^2}{c}$	$x=-\frac{p}{2}$	$x=-\frac{a^2}{c}$; $x=\frac{a^2}{c}$
Asimptotės	—	—	$y=-\frac{b}{a}x$; $y=-\frac{b}{a}x$
Viršūnės	Keturios: $(-a, 0)$, $(a, 0)$, $(0, -b)$, $(0, b)$	Viena: $(0, 0)$	Dvi: $(-a, 0)$, $(a, 0)$
Simetrijos ašys	Koordinačių sistemos ašys	Ašis Ox	Koordinačių sistemos ašys
Liestinės lygtis taške (x_0, y_0)[c]	$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$	$y\,y_0 = p(x + x_0)$	$\frac{x_0}{a^2}x-\frac{y_0}{b^2}y=1$
Ekscentricitetas[d]	$0 \le \varepsilon < 1$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon > 1$
Atskiri kreivių atvejai ir kiti vaizdavimo būdai	Apskritimas: $a = b = R$, $\varepsilon = 0$ židiniai sutampa	$y = Ax^2 + Bc + C$ (parabolė, kurios simetrijos ašis lygiagreti ašiai Oy)	Lygiaašė[e] hiperbolė: $a = b$, $\varepsilon = \sqrt{2}$; lygtis $xy = k = \frac{a^2}{2}$
Plotas[f]	$S = \pi ab$	—	—

[a] tik tuo atveju, kai židiniai yra ašyje Ox; [b] kiekvieno kreivės taško atstumų direktrisės nuo židinio santykis yra pastovus ir lygus kreivės ekscentricitetui; [c] darome prielaidą, kad taškas priklauso kreivei; [d] $\varepsilon = \frac{c}{a}$; [e] elipsę, parabolę ir hiperbolę (vieną šaką) galime pavaizduoti ir polinėje sistemoje (žr. p. 60), kurios išraiška $\rho = \frac{p}{(1+\varepsilon\cos\varphi)}$, p — parametras; [f] elipsės ilgio negalime išreikšti elementariąja išraiška, apytiksliai $L = \pi[1{,}5(a + b) - \sqrt{ab}]$

Antrojo laipsnio lygtis

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

(kurioje bent vienas skaičių A, B arba C yra nelygus nuliui) gali apibrėžti apskritimą, elipsę, parabolę, hiperbolę, taip pat (pavieniu atveju) tiesių porą, tiesę, tašką arba tuščią aibę. Kiekvieną šių figūrų galima gauti perkirtus kūginį paviršių plokštuma.

RINKTINĖS KREIVĖS IR FUNKCIJOS

Tiesinė funkcija Lygtis $y = ax + b$. Tiesė. Funkcija didėjanti, kai $a > 0$ ir mažėjanti, kai $a < 0$; pastovi, kai $a = 0$	**Kvadratinė funkcija** Lygtis $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Parabolė. Funkcija iškila $(a > 0)$ arba įgaubta ($a < 0$; plg. su p. 18)	**Kubinė funkcija** Lygtis $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$. $x \in R$, $y \in R$. Turi 1, 2 arba 3 nulius. Asimptočių neturi.
Trupmeninė racionalioji funkcija Lygtis $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ (sąlyga $ad \neq bc$). Hiperbolė. Monotoninė visoje apibrėžimo srityje ($x \neq -\frac{d}{c}$, turi dvi asimptotes)	**Modulio ženklas** $y=\lvert x\rvert=\begin{cases}-x, & \text{kai } x<0,\\ x, & \text{kai } x\geq 0\end{cases}$ mažėjanti, kai $x < 0$; didėjanti, kai $x > 0$; turi minimumą (kartu ir smailumą), kai $x = 0$	**Funkcija signum** $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & \text{kai } x<0\\ 0, & \text{kai } x=0\\ 1, & \text{kai } x>0\end{cases}$ trūki taške $x = 0$; pastovi, kai $x \neq 0$
Rodiklinė funkcija $y = a^x$ $(a > 0)$. Apibrėžta kai $x \in R$. Pastovi, kai $a = 1$, didėjanti $(a > 0)$ arba mažėjanti $(0 < a < 1)$; ašis Ox — horizontalioji asimptotė	**Logaritminė funkcija** $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$. Apibrėžta, kai $x > 0$, monotoninė; ašis Oy — vertikalioji asimptotė	**Šaknies funkcija** Funkcija $y = \sqrt{x}$. Apibrėžta, kai $x \geq 0$. Visoje apibrėžimo srityje iškila ir didėjanti. Mažiausią reikšmę $(y = 0)$ įgyja, kai $x = 0$
Cikloidė Parametrinės lygtys: $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ Periodinė kreivė (periodas $2\pi a$) nubrėžta taškų apskritimo, su spinduliu a, riedančio be slydimo ašimi Ox. Vieno periodo lanko ilgis: $L = 8a$; plotas po vienu lanku: $S = 3\pi a^2$	**Kardioidė** Polinėje koordinačių sistemoje: $\rho = R(1 + \cos\varphi)$. Kreivė nubrėžta taške apskritimo, kurio spindulys R, riedančio be slydimo apskritimu, kurio spindulys R. Turi vieną smailumo tašką. Kreivės perimetras: $L = 8R$; plotas kreivės viduje: $S=\frac{3}{2}\pi R^2$	**Astroidė** Neišreikštinė lygtis: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=R^{\frac{2}{3}}$. Kreivė nubrėžta taške apskritimo, kurio spindulys $\frac{R}{4}$, riedančių be slydimo viduje apskritimo, kurio spindulys R. Turi keturis smailumus, ilgis $L = 6R$; plotas aprėžtas kreive: $S=\frac{3}{8}\pi R^2$
Grandininė kreivė $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{-x}{a}}\right)$. Forma, kurią įgauna neišsitempiantis siūlas, pakabintas ant dviejų taškų. Viršūnė $A(0, a)$; lanko ilgis nuo viršūnės iki taško (x, y): $L=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{-x}{a}}\right)$ plotas po lanku: $S = aL$	**Archimedo spiralė** Polinėje koordinačių sistemoje $\rho = a\varphi$ $(a > 0)$. Apibrėžiama tašku, kuris tolsta pastoviu greičiu duotąja pustiese, kuri sukasi aplink savo pradžią pastoviu greičiu; pustiesėse, išeinančiose iš koordinačių pradžios, atidedamos vienodo ilgio atkarpos. Paprastai imame tik $\varphi > 0$	**Logaritminė spiralė** Polinėje koordinačių sistemoje $\rho = ae^{k\varphi}$ $(a, k > 0)$. Kreivė, kertanti visas pustieses, išeinančias iš koordinačių pradžios pastoviu kampu α ($k = \operatorname{ctg}\alpha$); kai $\varphi \to -\infty$ spiralė asimptotiškai artėja prie poliaus. Lanko dalies ilgis $L=\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}(\rho_2-\rho_1)$

LOGIKA IR VEIKSMAI SU AIBĖMIS

Loginio teiginio reikšmė

1 — teisingas teiginys
0 — neteisingas teiginys

Loginiai ryšiai

Teiginių teisingumas		Neiginys $\sim p$ ne p	Disjunkcija $p \vee q$ p arba q	Konjunkcija $p \wedge q$ p ir q	Implikacija $p \Rightarrow q$ jei p, tai q	Ekvivalentiškumas $p \Leftrightarrow q$ p ekvivalentiškas q
p	q					
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Kai kurie logikos dėsniai

Trečio negalimojo dėsnis	$p \vee \sim p$
Dvigubo neigimo dėsnis	$p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$
Implikacijos neigimo dėsnis	$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [p \wedge (\sim q)]$
Kontrapozicijos dėsnis	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
Implikacijos tranzityvumas	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
Eliminavimo taisyklė	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

De Morgano dėsniai

Konjunkcijos neiginys yra neiginių disjunkcija $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
Disjunkcijos neiginys yra neiginių konjunkcija $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

Kvantoriai ir jų neigimas

Kvantorius			Kvantoriaus neigimas
Pavadinimas	Simbolis	Reikšmė	
Bendrumo	$\forall x: p(x)$	Su kiekvienu x teisingas $p(x)$	$\sim[\forall x: p(x)] \Leftrightarrow [\exists x: \sim p(x)]$
Egzistavimo	$\exists x: p(x)$	Egzistuoja toks x, su kuriuo teisingas $p(x)$	$\sim[\exists x: p(x)] \Leftrightarrow [\forall x: \sim p(x)]$

Pastaba: taip pat yra kitoks kvantorių žymėjimas.

Bendrumo kvantorius: $\bigwedge_x p(x)$, Egzistavimo kvantorius: $\bigvee_x p(x)$.

Pagrindinės loginių ryšių rūšys

Ryšių rūšys	Reikalaujamos ryšių[a] savybės	Pavyzdžiai
Tvarkos ryšiai	1) jei $a \neq b$ ir aRb, tai netiesa, kad bRa (dalinė antisimetrija); 2) jei aRb ir bRc, tai aRc (tranzityvumas)	Ryšiai $<, \leq, \geq, >$ skaičių aibėse, aibių tarpusavio dalys
Tapatybės ryšiai	1) su kiekvienu a teisinga aRa (refleksyvumas); 2) jei aRb, tai bRa (simetriškumas); 3) jei aRb ir bRc, tai aRc (transityvumas)	Skaičių lygybės, tiesių lygiagretumas, aibių galios vienodumas, figūrų kongruentumas

[a] užrašą aRb skaitome „a susietas su b sąryšiu R“

Pagrindiniai veiksmai su aibėmis

Veiksmas		Veiksmo rezultatų aibės elementai yra...	Brėžinys	Kai kurios savybės
Aibių sąjunga	$A \cup B$	... visi tie elementai, kurie priklauso A arba B	A B	$A \cup A = A$ $A \cup \varnothing = A$
Aibių sankirta	$A \cap B$	... visi tie elementai, kurie priklauso A ir B	A B	$A \cap A = A$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
Aibių skirtumas	$A - B$	... visi tie elementai, kurie priklauso A ir nepriklauso B	A B	$A - A = \varnothing$ $A - \varnothing = A$
Aibės A papildinys iki Ω	A'	... visi tie elementai, kurie priklauso Ω ir nepriklauso A	A A Ω	$A \cap A' = \varnothing$ $A \cup A' = \Omega$
Aibių Dekarto sandauga	$A \times B$	... visos sutvarkytos poros (a, b), tokios, kad a įgyja visas aibės A elementų reikšmes, o b įgyja visas aibės B elementų reikšmes	A B	Jei $A \neq B$ bei A ir B netuščios aibės, tai $A \times B \neq B \times A$

Teiginių ir aibių taisyklių palyginimas

Teiginių skaičiavimas	Aibių skaičiavimas
Teiginys p	Aibė A
Teiginio neiginys $\sim p$	Aibės papildinys A'
Teiginių disjunkcija $\vee$	Aibių sąjunga $\cup$
Teiginių konjunkcija $\wedge$	Aibių sankirta $\cap$
Teiginių implikacija $p \Rightarrow q$	Aibės poaibis $A \subset B$
Teiginių ekvivalentiškumas $p \Leftrightarrow q$	Aibių lygumas $A = B$
Disjunkcijos komutatyvumas $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$	Sudėties komutatyvumas $A \cup B = B \cup A$
Konjunkcijos komutatyvumas $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$	Daugybos komutatyvumas $A \cap B = B \cap A$
Disjunkcijos asociatyvumas $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$	Sudėties asociatyvumas $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Konjunkcijos asociatyvumas $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$	Daugybos asociatyvumas $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Disjunkcijos distributyvumas konjunkcijos atžvilgiu $[(p \wedge q) \vee r] \Leftrightarrow [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$	Sudėties distributyvumas daugybos atžvilgiu $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
Konjunkcijos distributyvumas disjunkcijos atžvilgiu $[(p \vee q) \wedge r] \Leftrightarrow [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$	Daugybos distributyvumas sudėties atžvilgiu $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
De Morgano dėsniai $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$ $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)]$	De Morgano dėsniai $(A \cap) B)' = A' \cup B'$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

KOMBINATORIKA

Pagrindinės kombinatorikos formulės

Iš aibės A, kurioje yra tam tikri skirtingi elementai, sudaromi junginiai.

Sudarymo būdas	Aibė A	Sudaromuose junginiuose			Galimų parinkimų skaičius
		Kiek yra elementų?	Elementai gali kartotis?	Eiliškumas svarbus?	
Kėliniai be pasikartojimų	n–elementės	n	Ne	Taip	$P_n = n!$
Kėliniai su pasikartojimais	k–elementės		Taip, atitinkamai $n_1, n_2, \ldots, n_k$ kartų[a]		$P_{n'} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$
Gretiniai be pasikartojimų	n–elementės	k (čia $k \leq n$)	Ne		$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Gretiniai su pasikartojimais			Taip		$W_n^k = n^k$
Deriniai be pasikartojimų			Ne	Ne	$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Deriniai su pasikartojimais			Taip		$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

[a] pirmas iš k elementų pasirodo n_1 kartų, antras n_2 kartų ir t. t.; sumoje $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

Pavyzdžiai

Aibė A	Užduotis	Sprendinių skaičius	Galimi poaibiai
$A = \{a, b, c\}$	Kėliniai be pasikartojimų	$P_3 = 3! = 6$	{abc, acb, bac, bca, cab, cba}
	Gretiniai be pasikartojimų (kai $k = 2$)	$V_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 3! = 6$	{ab, ba, ac, ca, bc, cb}
	Gretiniai su pasikartojimais ($k = 2$)	$W_3^2 = 3^2 = 9$	{ab, ba, ac, ca, bc, cb, aa, bb, cc}
	Deriniai be pasikartojimų (kai $k = 2$)	$C_3^2 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$	{ab, ac, bc}
	Deriniai su pasikartojimais (kai $k = 2$)	$\overline{C}_3^2 = \binom{3+2-1}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$	{ab, ac, bc, aa, bb, cc}
$A = \{a, c\}$	Kėliniai su pasikartojimais ($k = 2, n = 3, n_1 = 2, n_2 = 1$)	$P_3' = \frac{3!}{2!1!} = 3$	{aac, aca, caa}

TIKIMYBIŲ TEORIJA

Aksiominis tikimybės apibrėžimas

Elementariųjų įvykių aibėje (aibė Ω baigtinė) apibrėžiama tikimybė, jei kiekvienam įvykiui $A \subset \Omega$ priskiriamas tik vienas skaičius $P(A)$ (vadinamas įvykio A tikimybe) su tokiomis savybėmis:

1) $P(A) \geq 0$;
2) kai A ir B — nesutaikomųjų įvykių pora, tai $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
3) $P\Omega = 1$.

Pagrindinės tikimybių savybės

Jei Ω elementariųjų įvykių aibė, o A ir B įvykiai ($A \subset \Omega$ ir $B \subset \Omega$), tai:

$P(\varnothing) = 0$; $\quad P(A) \leq 1$; $\quad P(\Omega - A) = 1 - P(A)$.

Jei $A \subset B$, tai $P(A) \leq P(B)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$.

Jei $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, tai įvykius A ir B vadiname **nepriklausomais**.

Klasikinis tikimybės apibrėžimas (Laplaso apibrėžimas)

Jei visi elementarieji įvykiai vienodai galimi, tai turime $P(A) = \frac{n}{N}$; čia n — įvykių, palankių įvykiui A, skaičius N — visų įvykių skaičius.

Sąlyginė tikimybė

Tikimybė įvykti įvykiui A, jei įvyko įvykis B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (P(B) > 0)$$

Pilnoji tikimybė poromis nesutaikomų įvykių $B_1, B_2, \ldots, B_n$, tokių, kad jų sumos tikimybė yra lygi 1, o kiekvieno įvykio tikimybė > 0:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n).$$

Pagrindinės atsitiktinių kintamųjų funkcijos

Funkcija	Apskaičiavimo būdas[a]	Pastabos
EX, vidurkis	$EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$	Pagrindinis atsitiktinio dydžio matas
D^2X, dispersija[b]	$D^2X = E(X - EX)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_1 - EX)^2 p_i = E(X^2) - (EX)^2$	Sklaida apie vidurkį

[a] atsitiktiniam dydžiui, kuris gali įgauti n reikšmių ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) su atitinkama tikimybe $p_1, p_2, \ldots, p_n$; [b] $DX = \sqrt{D^2X}$ vadinamas standartiniu nuokrypiu

Parinktieji tikimybių pasiskirstymai

Skirstinys	Matematinė išraiška	EX	D^2X	Apibrėžimas
Binominis	$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	np	npq	Tikimybė, kad per n bandymų k kartų įvyks teisingas[a] įvykis
Puasono	$P(X=k) = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$	np	np	Ribinė binominio skirstinio išraiška, kai n dideli ir p[b] maži

p — pasisekimo tikimybė, $0 < p < 1$, q — nesėkmės tikimybė, $q = 1 - p$.
[a] taip vadinama Bernulio schema; [b] Puasono skirstinio taikymas vietoj binominio dažniausiai yra patenkinamas, kai $n > 20$, $p < 0{,}2$